

# PROIZVODNA FUNKCIJA I OPTIMALNA UPOTREBA FAKTORA PROIZVODNJE

---

**Stojačić, Paulina**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Economics in Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Ekonomski fakultet u Osijeku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:145:585806>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-13**



*Repository / Repozitorij:*

[EFOS REPOSITORY - Repository of the Faculty of Economics in Osijek](#)



Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Ekonomski Fakultet u Osijeku

Preddiplomski studij Poslovne informatike

Paulina Stojčić

**PROIZVODNA FUNKCIJA I OPTIMALNA UPOTREBA  
FAKTORA PROIZVODNJE**

Završni rad

Osijek 2022.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku  
Ekonomski Fakultet u Osijeku  
Preddiplomski studij Poslovne informatike

Paulina Stojčić

**PROIZVODNA FUNKCIJA I OPTIMALNA UPOTREBA  
FAKTORA PROIZVODNJE**

Završni rad

**Kolegij: Mikroekonomika**

JMBAG: 0010230564

e-mail: [pstojacic@efos.hr](mailto:pstojacic@efos.hr)

Mentor: izv.prof.dr.sc. Ivan Kristek

Osijek, 2022.

Josip Juraj Strossmayer University of Osijek  
Faculty of Economics in Osijek  
Undergraduate Study of Business informatics

Paulina Stojačić


**PRODUCTION FUNCTION AND OPTIMAL USE OF  
PRODUCTION FACTORS**

Završni rad

Osijek, 2022.

## IZJAVA

### O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI, PRAVU PRIJENOSA INTELKTUALNOG VLASNIŠTVA, SUGLASNOSTI ZA OBJAVU U INSTITUCIJSKIM REPOZITORIJIMA I ISTOVJETNOSTI DIGITALNE I TISKANE VERZIJE RADA

1. Kojom izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je \_\_\_\_\_ završni \_\_\_\_\_ (navesti vrstu rada: završni / diplomski / specijalistički / doktorski) rad isključivo rezultat osobnoga rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu. Potvrđujem poštivanje nepovredivosti autorstva te točno citiranje radova drugih autora i referiranje na njih.
2. Kojom izjavljujem da je Ekonomski fakultet u Osijeku, bez naknade u vremenski i teritorijalno neograničenom opsegu, nositelj svih prava intelektualnoga vlasništva u odnosu na navedeni rad pod licencom *Creative Commons Imenovanje – Nekomercijalno – Dijeli pod istim uvjetima 3.0 Hrvatska*. 
3. Kojom izjavljujem da sam suglasan/suglasna da se trajno pohrani i objavi moj rad u institucijskom digitalnom repozitoriju Ekonomskoga fakulteta u Osijeku, repozitoriju Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku te javno dostupnom repozitoriju Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (u skladu s odredbama Zakona o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju, NN br. 123/03, 198/03, 105/04, 174/04, 02/07, 46/07, 45/09, 63/11, 94/13, 139/13, 101/14, 60/15).
4. izjavljujem da sam autor/autorica predanog rada i da je sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti istovjetan sa dovršenom tiskanom verzijom rada predanom u svrhu obrane istog.

**Ime i prezime studenta/studentice:**

**JMBAG:** 0010230564

**OIB:** 14023621315

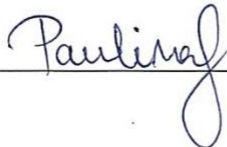
**e-mail za kontakt:** pstojacic@efos.hr

**Naziv studija:** Preddiplomski studij Poslovne informatike

**Naslov rada:** Proizvodna funkcija i optimalna upotreba faktora proizvodnje

**Mentor/mentorica završnog rada:** izv.prof.dr.sc. Ivan Kristek

U Osijeku, 19. 09. 2022. godine

Potpis 

# Proizvodna funkcija i optimalna upotreba faktora proizvodnje

## SAŽETAK

Tehnološki odnos inputa i outputa naziva se proizvodna funkcija. Ona pokazuje funkcionalni odnos između inputa i outputa poduzeća u procesu proizvodnje. Osnovni zadatak proizvodne funkcije je proizvodnja određene količine proizvoda definirane kvalitete, u točno određeno vrijeme, uz najmanju cijenu i u skladu s osnovnom strukturom sredstava, kvalifikacijskom strukturom zaposlenika i njihovim iskustvom. Taj zadatak se smatra uspješno obavljenim samo onda kada proces proizvodnje donese zaradu. Proizvodna funkcija utječe na donošenje odluka i odabiranje najbolje moguće alternative koja u konačnici mora dovesti do najveće moguće dobiti. Proizvodna funkcija ima 3 oblika, a to su: linearani, degresivni i progresivni. Razliku u proizvodnim funkcijama određuju dvije stavke: vremensko razdoblje (dugi ili kratki rok) i stanje tehnologije.

Izokvanta povezuje sve kombinacije inputa za koje je razina proizvodnje jednaka, a izotroškovni pravac daje opis kombinacija proizvodnih inputa koje za poduzeće iznose isti trošak. Određivanje optimalne upotrebe faktora proizvodnje se sastoji od kreiranja tablice koja prikazuje izokvante i crte izotroška. Optimalna, tj. najbolja kombinacija je ona koja omogućava ispunjenje određenog opsega proizvodnje. Drugim riječima, ona koja tržištu daje potraživanu količinu proizvoda, uz najniže moguće troškove.

**Ključne riječi:** Proizvodna funkcija, input, output, resursi, faktor proizvodnje, izokvanta, izotroškovni pravac

# **Production Function And Optimal Use Of Production Factors**

## **ABSTRACT**

The technological relationship between input and output is called the production function. It shows the functional relationship between the company's input and output in the production process. The main task of the production function is to produce a certain amount of products of defined quality, at a precisely determined time, at the lowest price possible and in accordance with the basic structure of assets, the qualification structure of employees and their experience. This task is considered successfully completed only when the production process brings profit. The production function affects decision-making and the selection of the best possible alternative, which must ultimately lead to the highest possible profit. The production function has 3 forms, namely: linear, degressive and progressive. The difference between these different production functions is determined by two items: the time period (long or short run) and the state of technology.

The isoquant connects all combinations of inputs for which the level of production is the same, and the isocost direction describes the combinations of production inputs that amount to the same cost for the company. Determining the optimal use of production factors consists of creating a table showing isoquants and isocost lines. The optimal, i.e. the best, combination is the one that enables the fulfilment of a certain scope of production. In other words, the one that provides the market with the required amount of products, at the lowest possible costs.

**Key words:** Production function, input, output, resources, production factor, isoquant, isocost

## Sadržaj

<b>1. Uvod</b> .....	<b>1</b>
<b>2. Teorijska podloga</b> .....	<b>2</b>
2.1. Proizvodna funkcija i primjena proizvodne funkcije .....	2
2.2. Oblici proizvodne funkcije.....	5
<b>3. Metodologija rada</b> .....	<b>7</b>
<b>4. Opis istraživanja i rezultati istraživanja</b> .....	<b>8</b>
4.1. Krivulje jednakih količina (izokvante).....	8
4.2. Granična stopa tehničke zamjene .....	10
4.3. Pravci jednakih troškova (izotroškovni pravci) .....	12
4.4. Optimalna upotreba faktora proizvodnje.....	13
<b>5. Rasprava</b> .....	<b>17</b>
<b>6. Zaključak</b> .....	<b>19</b>
<b>Literatura</b> .....	<b>20</b>
<b>Popis tablica</b> .....	<b>20</b>
<b>Popis slika</b> .....	<b>20</b>
<b>Popis grafikona</b> .....	<b>20</b>



## 1. Uvod

Primarni i krajnji cilj gospodarske djelatnosti je zadovoljenje ljudskih želja i potreba. Kako bi došlo do zadovoljenja istih, pojedinci moraju uložiti napore u proizvodnju dobara i usluga. Bez proizvodnje ne može doći do zadovoljenja želja. Opće gledano, proizvodnja se odnosi na proces stvaranja proizvoda ili usluga koji zadovoljavaju ljudske želje i potrebe. Za pokretanje proizvodnje potrebni su inputi, faktori proizvodnje kao što su zemljište, rad, kapital itd., koji se nakon što su stavljeni u proces proizvodnje pojavljuju kao gotovi proizvod koji se naziva outputom.

Proizvodna funkcija prikazuje koliko se outputa može dobiti za određenu varijaciju inputa stavljenih u proces proizvodnje. Zadatak proizvodne funkcije je proizvesti određenu količinu proizvoda određene kvalitete, u određeno vrijeme, uz najmanju cijenu i u skladu s osnovnom strukturom sredstava, kvalifikacijskom strukturom zaposlenika i njihovim iskustvom. Proizvodna funkcija također utječe na donošenje odluka i odabiranje najbolje moguće alternative koja u konačnici dovodi do maksimalne moguće dobiti.

Cilj završnog rada je prikazati teorijsku podlogu proizvodne funkcije kao i njenu primjenu te oblike proizvodne funkcije. Nadalje, u 4. Poglavlju će se definirati krivulja jednakih količina, izotroškovni pravci te na kraju optimalna upotreba faktora proizvodnje.

## 2. Teorijska podloga

### 2.1. Proizvodna funkcija i primjena proizvodne funkcije

Bakalar (2009) ističe kako je proizvodnja proces pretvorbe faktora proizvodnje u proizvode i usluge, a proces proizvodnje se odvija u poduzeću koje nabavlja faktore proizvodnje, organizira proces proizvodnje u kojem dolazi do stvaranja proizvoda i usluga te ono vrši prodaju svojih proizvoda s ciljem ostvarivanja najvećeg mogućeg profita.

Inputi se odnose na faktore proizvodnje koji ulaze u proces stvaranja određenog proizvoda ili usluge, a output predstavlja gotov proizvod ili uslugu koji su rezultat svih kombiniranih faktora proizvodnje. „U proizvodnom procesu tvrtke pretvaraju inpute u outpute (proizvode). Inputi, koje još nazivamo i faktorima proizvodnje, jesu sve ono što tvrtke moraju upotrijebiti u procesu proizvodnje.“ (Pindyck i Rubinfeld, 2005:178)

Sve što se koristi u proizvodnji robe naziva se input te oni predstavljaju temelj ili ulaz proizvodnog sustava. Primjerice, u proizvodnji pšenice - zemlja, sjeme, gnojivo, voda, pesticidi, traktor, radna snaga su inputi, a sama pšenica je output. Znači, output je ishod ili izlaz djelovanja nekog proizvodnog sustava. Gospodarskim procesom, ukupnim procesom stvaranja nove vrijednosti ili dodavanja nove vrijednosti obično se smatraju promjene na proizvodu od njegova oblika do mjesta i vremena upotrebe.

Tehnološki odnos između inputa i outputa naziva se proizvodna funkcija. Ona pokazuje funkcionalni odnos između inputa i outputa poduzeća u procesu proizvodnje. Točnije rečeno, Bakalar (2009) objašnjava kako je proizvodna funkcija jednadžba, grafikon ili tablica koji daje prikaz maksimalne proizvodnje koju poduzeće može ostvariti u danom vremenskom periodu s različitim kombinacijama faktora, to je odnos između maksimalne proizvodnje nekog proizvoda i različitih kombinacija faktora proizvodnje pri dostupnoj tehnologiji. Nadalje, Pindyck i Rubinfeld (2005) sugeriraju kako proizvodna funkcija detaljno prikazuje najveći output ( $Q$ ) kojeg neko poduzeće može proizvesti uz bilo koju varijaciju inputa. Ako postavimo hipotezu kako postoje samo dva inputa, rad koji označavamo s  $L$  te kapital kojeg označavamo s  $K$ , proizvodna funkcija će se moći zapisati na sljedeći način:  $Q = F(K, L)$ . Slijedi prikaz najjednostavnije forme proizvodne funkcije na slici 1.

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_J \\ \vdots \\ Q_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1i} & \dots & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2i} & \dots & F_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{j1} & F_{j2} & \dots & F_{ji} & \dots & F_{jN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{M1} & F_{M2} & \dots & F_{Mi} & \dots & F_{MN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}, \text{ odnosno: } Q = \mathcal{F} \cdot X.$$

Slika 1. Najjednostavnija forma proizvodne funkcije (Izvor: Šabolić, 2014)

Dakle, iz jednadžbe se može primijetiti kako output ovisi o jedinicama rada na kapitalu korištenom u proizvodnji. Također vrijedi primijeniti dvije stavke: prva je - proizvodna funkcija se mora razmatrati s obzirom na određeno vremensko razdoblje, tj. na dugi ili kratki rok. Kratki rok i dugi rok nisu određeni kalendarom, nego je kratki rok onaj vremenski interval u kojem su veličine inputa fiksne, a proizvođač oscilira veličinu samo određenih faktora proizvodnje, a dugi rok je vremenski interval u kojem su svi faktori proizvodnje podležni promjenama. Druga stavka je - proizvodna funkcija je određena stanjem tehnologije, što znači da s napretkom tehnologije poduzeća mogu postići više razine proizvodnje uz isti input. Fizička, kemijska i biološka svojstva inputa određuju vrstu i količinu outputa dobivenih iz određene kombinacije resursa. Svako poboljšanje tehnologije povećat će veličinu prihoda iz bilo koje kombinacije inputa, mijenjajući tako proizvodnu funkciju. Pindyck i Rubinfeld (2005) naglašavaju kako proizvodna funkcija daje opis onog što je tehnički izvedivo kad tvrtka na najefikasniji način iskorištava varijacije dostupnih resursa.

Karić (2010) navodi kako postoji funkcionalni odnos između količine inputa i outputa te kako se taj funkcionalni odnos matematički izražava: 3 količina outputa ( $Y_1$ ) funkcija je količine inputa ( $X_1$ ), odnosno  $Y_1 = f(X_1)$ . Ključni zadatak proizvodne funkcije, prema Žugaj, Šehanović i Cingula (2004), je proizvodnja definiranih proizvoda u određenoj količini i kakvoći u definirano vrijeme s najmanjim mogućim rashodima u skladu sa strukturom temeljnih sredstava i kvalifikacijama zaposlenih radnika zajedno s njihovim radnim iskustvom. Pružanje prikaza količine učinaka koji se mogu proizvesti mijenjanjem količine proizvodnih resursa koji su upotrebljivi je temeljna svrha proizvodne funkcije.

„Teoretski proizvodna funkcija može izražavati:

- a) izdašnost, to jest maksimalnu količinu učinaka (outputa) koja se može dobiti iz određene količine resursa (inputa), ili

b) štedljivost, to jest minimalnu količinu resursa (inputa) koja može osigurati određenu količinu učinaka (outputa)" (Karić, 2010:184).

Izdašnost se odnosi na maksimalnu količinu učinaka jer postoji pretpostavka kako poduzeća koriste samo tehnički učinkovite metode. To znači da se ukupan proizvod mora povećati kada se koristi veća količina jednog resursa s jednakim ili većim količinama drugog resursa. Proizvodna funkcija pokazuje što se može dobiti u određenom vremenu s obzirom na stanje tehnologije, a ne koliko prosječno poduzeće u grani zapravo proizvodi u istom vremenu. Na temelju proizvodne funkcije, proizvođač donosi odluku koji će od raznih alternativa proizvodnje određenog proizvoda odabrati i upotrijebiti kako bi se proizvodnja ostvarila te u konačnici ostvarila maksimalna dobit.

„Glavna su područja primjene proizvodne funkcije:

- 1) Predviđanje opsega proizvodnje (prinosa) uz poznate količine i kakvoću resursa, te uz određene uvjete i metode (tehnologiju) proizvodnje.
- 2) izbor vrsta proizvodnih inputa i njihove količinski najpovoljnije kombinacije u proizvodnji određenog outputa (tehnički učinkovite kombinacije), i
- 3) izbor najpovoljnije tehnologije proizvodnje (na primjer, agrotehnike za određenu proizvodnju)“ (Karić, 2010: 185).

Proizvodna funkcija se ne može mijenjati, zato postoji mogućnost odabira između alternativnih funkcija uz koje postoje ekonomski rizici i ekonomske posljedice. Prilikom odabira najpovoljnije kombinacije resursa, prvo se odabire tehnički učinkovita kombinacija, a smatra se tehnički učinkovitom ako niti jedna druga kombinacija ne može postići isti učinak uz manje uloženi resursa. Kao što je već navedeno, proizvođač mora odlučiti koji će od mnogobrojnih načina proizvodnje upotrijebiti. Ako je proizvođač zainteresiran za maksimizaciju dobiti, dati će prednost određenim proizvodnim funkcijama koje mogu ostvariti željeni dobit uz uporabu resursa koje poduzeće posjeduje. Karić (2010) zaključuje kako proizvodna funkcija koja ima oblik  $Y = f(X)$  govori donositeljima odluke da količina proizvoda  $Y$  ovisi o količini  $X$  upotrebljenoj u proizvodnji  $Y$ , ali ne objašnjava za koji iznos se  $Y$  mijenja kada dolazi do promjene te je zato potrebno potkrijepiti informacije o:

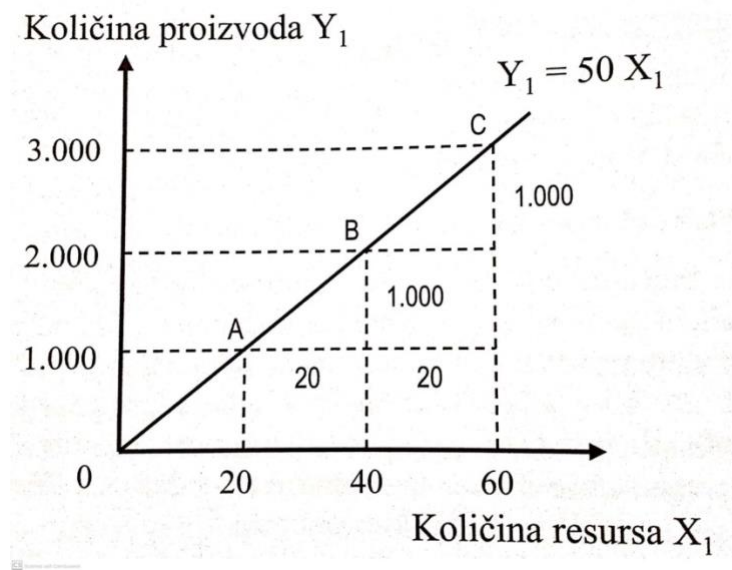
- 1) vrstama resursa koji će se upotrijebiti
- 2) količini resursa koji će se upotrijebiti
- 3) načinima na koje će se kombinirati resursi kako bi došlo do proizvodnje određenih količina proizvoda.

## 2.2. Oblici proizvodne funkcije

Postoje tri oblika proizvodne funkcije, a to su:

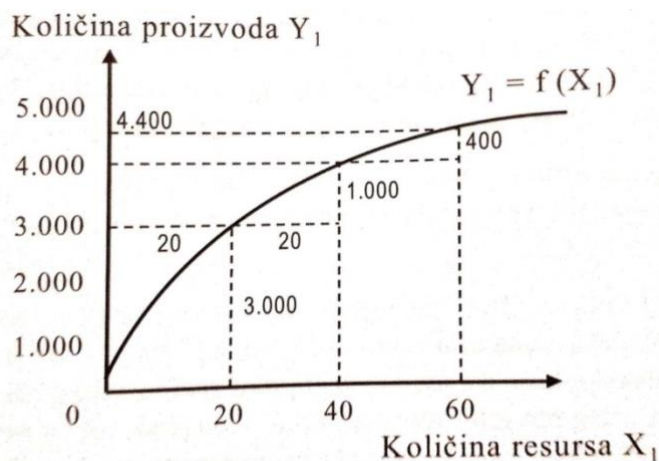
- a) Linearni (konstantni)
- b) Degresivni (opadajući)
- c) Progresivni (proizvodni)

Karić (2010) linearnu proizvodnu funkciju definira kao izraz neprestanog odnosa između količine prinosa i količine jednog promjenjivog resursa, u tom slučaju količinski prinos se povećava za isti iznos za svaku dodatnu jedinicu resursa te promjene količine resursa u proizvodnji daju konstantan proizvod. Na primjer, od točke A do točke B grafu 1., promjena  $Y_1$  je 1000, dok promjena  $X_1$  iznosi 20. Zato što je proizvodna funkcija linearna ili konstantna, nagib je 50 bez obzira u kojoj točki na krivulji se nalazi, a  $Y_1$  se povećava za 50 jedinica kod svakog povećanja  $X_1$ .



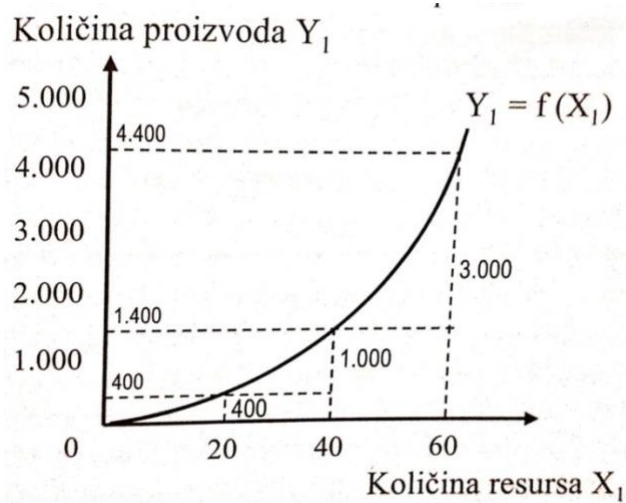
Graf 1. Linearna proizvodna funkcija s jednim promjenjivim resursom – konstantni prinosi (Izvor: Karić, 2010)

Karić (2010) navodi kako je degresivna proizvodna funkcija prikaz opadajućeg odnosa količine prinosa i količine jednog promjenjivog resursa te ona postoji samo onda kada svaka dodatna jedinica resursa rezultira sve manjim rastom prinosa u usporedbi na prethodnu jedinicu. Degresivna proizvodna funkcija, u odnosu na x-os, ima oblik konkavno zakrivljene krivulje u grafičkom prikazu. Prema krivulji, s porastom utroška resursa, granični prinosi se smanjuju te mogu postati i negativni, tj. kako se resursi dodaju, nagib krivulje postaje sve manji. Slijedi primjer opadajućih prinosa na grafu 2.



Graf 2. Proizvodna funkcija s jednim promjenjivim resursom - opadajući prinosi (Izvor: Karić, 2010)

Progresivna proizvodna funkcija, kako objašnjava Karić (2010), izražava rastući odnos količine prinosa i količine jednog promjenjivog resursa te u takvom tipu odnosa svaka dodatna jedinica resursa rezultira većim porastom prinosa (proizvoda) u odnosu na prethodnu jedinicu, sveukupni prinos se povećava po rastućoj stopi tako da se povećava granični prinos. Kao što se može vidjeti na grafu 3., nagib krivulje postaje sve strmiji što se više resursa dodaje te ona predstavlja slučaj rastućih prinosa. Ovakvi slučajevi i primjeri se najčešće pojavljuju kod niskih razina ulaganja resursa, tj. kada se nalaze u prvobitnoj etapi utroška promjenjivog resursa.



Graf 3. Proizvodna funkcija s jednim promjenjivim resursom - rastući prinosi (Izvor: Karić, 2010)

### 3. Metodologija rada

Prilikom izrade završnog rada korištene su metode analize i sinteze, statistička metoda, metoda deskripcije te metoda kompilacije. Ovaj završni rad je ponajprije teorijski pa je u istraživačkom dijelu rada na primjerima prikazano i objašnjeno određivanje optimalne upotrebe faktora proizvodnje s obzirom na izotroškovnu kartu i izotroškovne pravce. Rad se sastoji 6 poglavlja. Prvo poglavlje je uvodno, namijenjeno definiranju teme, te definiranju ključnih pojmova koji se navode u radu. U drugom poglavlju metodologije rada opisana je struktura rada te metode provedenog istraživanja. Treće poglavlje postavlja teorijsku podlogu proizvodne funkcije, njene podjele i primjenu. Nadalje, četvrto poglavlje potkrepljuje istraživanje u kojem se prikazuje određivanje optimalne upotrebe faktora proizvodnje s obzirom na izotroškovnu kartu i izotroškovne pravce te se izotroškovna karta, izotroškovni pravci i izokvante pobliže definiraju. Peto poglavlje raspravlja o temi. Šesto poglavlje zaključuje temu.

U radu su postavljene sljedeće hipoteze:

1. Nagib izokvante daje prikaz kako jedan resurs može biti zamijenjen drugim resursom, a da ukupan proizvod ostane nepromijenjen.
2. Granična stopa tehničke zamjene predstavlja određeni iznos za koji se resurs rada može umanjiti kada se upotrijebi jedna jedinica resursa kapitala više, ali uz održavanje stalne količine proizvoda.
3. Izotroškovni pravac daje opis kombinacija proizvodnih inputa koje poduzeće isto koštaju, to jest prikazuje koje kombinacije resursa poduzeće može kupiti za određeni novčani trošak.
4. Optimalna upotreba faktora proizvodnje je ona koja tržištu daje potraživanu količinu proizvoda, uz najniže moguće troškove.

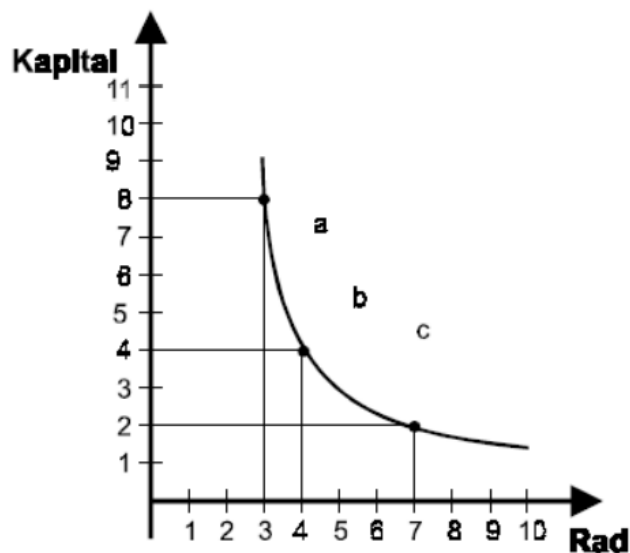
## 4. Opis istraživanja i rezultati istraživanja

### 4.1. Krivulje jednakih količina (izokvante)

„Izokvanta je krivulja koja povezuje sve moguće kombinacije inputa za koje je razina proizvodnje jednaka“ (Pindyck i Rubinfeld, 2005,179)

Karić (2010) daje naglasak bitnim obilježjima izokvante:

- negativan nagib, to jest opadajuća krivulja
- konveksnost u odnosu na položaj središta i
- udaljenost od ishoda koja označava veličinu opsega proizvodnje



Graf 4. Prikaz izokvante (Izvor: Ferenčak, 2003)

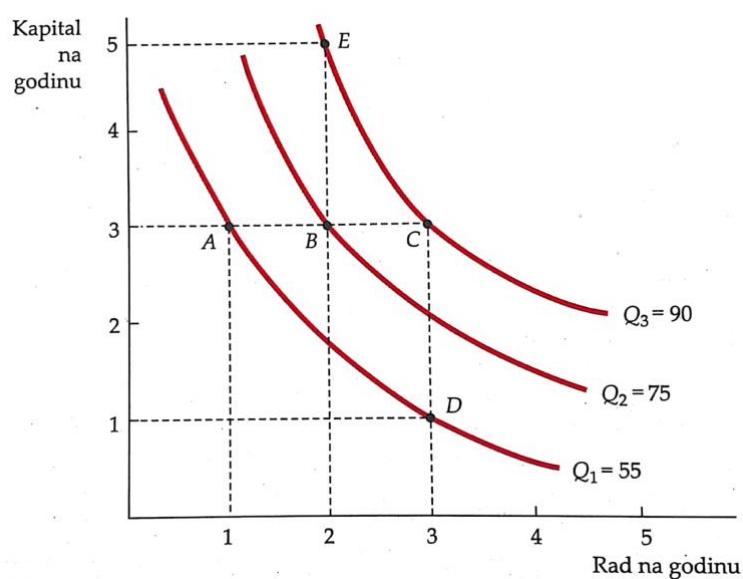
Nagib izokvante daje prikaz kako jedan resurs može biti zamijenjen drugim resursom, a da ukupan proizvod ostane nepromijenjen te se izokvanta može računati pomoću granične stope supstitucije o kojoj će se pobliže pisati u sljedećem poglavlju. Ferenčak (2003) tvrdi kako granična stopa supstitucije kapitala radom iznosi pozitivan broj te se dobije izračunom kao kvocijent odgovarajućeg smanjenja kapitala i povećanja rada. Ako pretpostavimo da su inputi rad i kapital te se koriste za proizvodnju pšenice, tablica 1 daje prikaz kolika je razina proizvodnje moguća uz različite kombinacije inputa. Mogući inputi rada su naznačeni u gornjem redu od 1 do 5, a inputi kapitala u lijevom stupcu od 1 do 5. Svaka ćelija u tablici sadrži maksimalnu godišnju razinu proizvodnje robe.



Tablica 1. Proizvodnja s dva varijabilna faktora (Izvor: Pindyck i Rubinfeld, 2005)

		INPUT RADA				
INPUT KAPITALA		1	2	3	4	5
1		10	40	55	65	75
2		20	60	75	85	90
3		55	75	90	100	105
4		65	85	100	110	115
5		75	90	105	115	120

Primjerice, uz 3 jedinice rada i 2 jedinice inputa kapitala proizvelo bi se 75 jedinica robe godišnje. Analizirajući sve redove, uz fiksni input rada vidljiv je rast proizvodnje kako se povećava input kapitala.



Graf 5. Proizvodnja s dva varijabilna faktora (Izvor: Pindyck i Rubinfeld, 2005)

Iščitano iz grafa 5., izokvanta  $Q_1 = 55$  znači da sve kombinacije rada i kapitala skupa omogućuju razinu proizvodnje od 55 jedinica godišnje. Točke A i D precizno odgovaraju podacima iz Tablice 1. U točki A, ulaže se 1 jedinica rada i 3 jedinice kapitala koje omogućuju razinu proizvodnje od 55 jedinica, dok u točki D jednaka razina proizvodnje se postiže kombiniranjem 3 jedinice rada i 1 jedinice kapitala na godinu. Razina proizvodnje se povećava kako se pomičemo s izokvante  $Q_1$  na  $Q_2$  te nadalje na  $Q_3$ .

Kada se na jednom grafu nalazi nekoliko izokvanti, kao što je prikazano na grafu 5., takav se graf naziva Mapa izokvanti. Pindyck i Rubinfeld (2005) mapu izokvanti ističu kao drugi način opisivanja funkcija proizvodnje, svaka izokvanta odgovara drugačijoj razini proizvodnje, a razina proizvodnje na grafikonu se povećava kako se pomičemo desno i gore. Izokvante također daju prikaz menadžerima u fleksibilnost poduzeća prilikom donošenja odluka o proizvodnji, poduzeća uglavnom mogu postići određenu razinu proizvodnje kada zamijene jedan input drugim inputom. Bitno je da menadžeri uzmu u obzir ovu fleksibilnost, jer mogu donijeti informiranu odluku o kombinaciji inputa koja će u konačnici smanjiti troškove, a ujedno i donijeti najveći mogući profit.

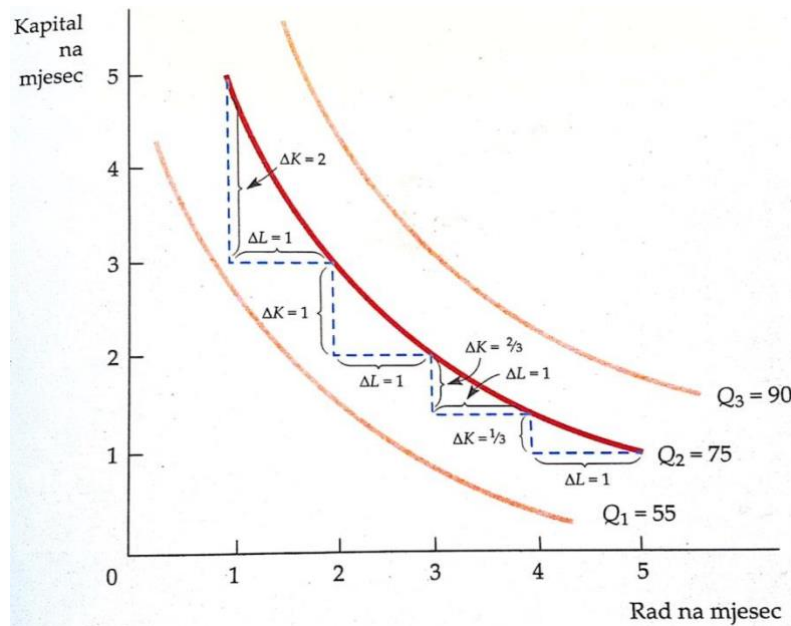
Između ostalog, izokvante na grafu 5. prikazuju kako su rad i kapital međusobno zamjenjivi kada je riječ o postizanju određene razine proizvodnje, no ta zamjena u praksi može potrajati, stoga je važno prilikom analize proizvodnje raspoznati dugi rok od kratkog roka. Pindyck i Rubinfeld (2005) kratki rok povezuju s razdobljem u kojem se jedan ili više faktora proizvodnje ne mogu mijenjati te dugi rok s vremenski rokom kada je potrebno da se promijene svi inputi. Bitno je napomenuti kako ne postoji definirano vremensko razdoblje koje dijeli kratki rok od dugog roka, nego se to razdoblje utvrđuje od slučaja do slučaja. Na primjer, štandu na festivalu razdoblje od 5 dana može značiti dugi rok, dok u slučaju velikih tvrtki razdoblje od 5 godina predstavlja dugi rok.

## **4.2. Granična stopa tehničke zamjene**

Kada se donositelj odluka nađe u situaciji gdje su oba inputa promjenjiva zasigurno će preispitati mogućnost zamijene jednog inputa drugim. Prema definiciji izokvante, ona je skup točaka koje predstavljaju različite kombinacije ulaganja faktora proizvodnje, kako bi se ostvarila željena razina proizvodnje mora slijediti zamjena ulaganja faktora proizvodnje. Nagib izokvante se naziva granična stopa tehničke zamjene (MRTS). Pindyck i Rubinfeld (2005) naglašavaju kako granična stopa tehničke zamjene kapitala radom je količina kapitala koja se mora smanjiti kako bi došlo do povećanja upotrebe rada za jednu jedinicu uz zadržavanje iste razine proizvodnje. Dakle, granična stopa tehničke zamjene predstavlja određeni iznos za koji se resurs rada može umanjiti kada se upotrijebi jedna jedinica resursa kapitala više, ali uz održavanje stalne količine proizvoda.

Pindyck i Rubinfeld (2005) definiraju jednadžbu granične stope tehničke kao:

$$MRTS = - \text{Promjena inputa kapitala} / \text{Promjena inputa rada} = -\Delta K / \Delta L \text{ (za fiksnu } Q\text{)}.$$



Graf 6. Granična stopa granične supstitucije (Izvor: Pindyck i Rubinfeld, 2005)

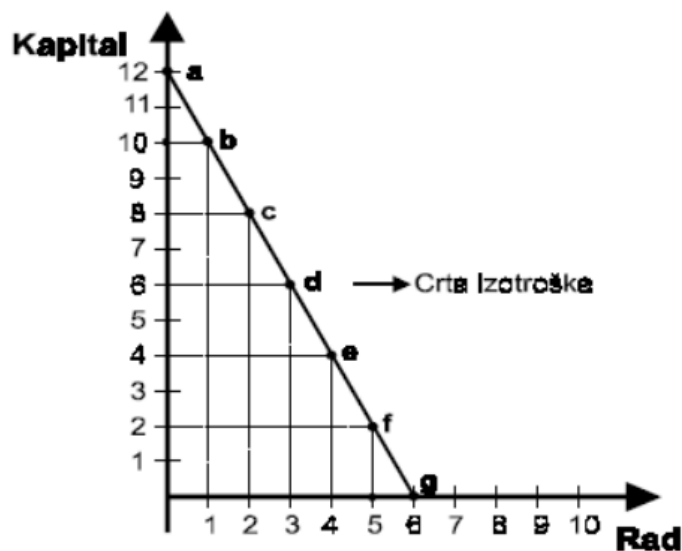
U bilo kojoj točki nagib izokvante mjeri graničnu stopu tehničke zamjene, to jest mogućnost tvrtke da kapital zamijeni radom uz održavanje iste razine proizvodnje. Primjer iz grafa 6., na izokvanti  $Q_2$  Granična stopa tehničke zamjene (MRTS) pada od 2 na 1, onda na  $2/3$  i u konačnici na  $1/3$ . Granična stopa tehničke zamjene iznosi 2 onda kada input rada se poveća s 1 na 2 jedinice, uz fiksnu razinu proizvodnje koja iznosi 75 jedinica. Kako se više rada upotrebljuje umjesto kapitala, produktivnost rada se smanjuje, a kapital postaje produktivniji. Prema tome, za zadržavanje stalne razine proizvodnje potrebno je manje kapitala, a sama izokvanta postaje položajna.

Ako dođe do opadanja Granične stope tehničke supstitucije - što je slučaj kod većinskog dijela proizvodnih tehnologija - to govori kako je ograničena produktivnost jednog inputa.

Pindyck i Rubinfeld (2005) smatraju da kako dodajemo sve više i više rada te njime zamjenjujemo kapital, produktivnost rada pada, također, ako se zamjeni rad kapitalom, produktivnost kapitala će padati. Proizvodni proces zahtijeva uravnoteženu mješavinu oba inputa.

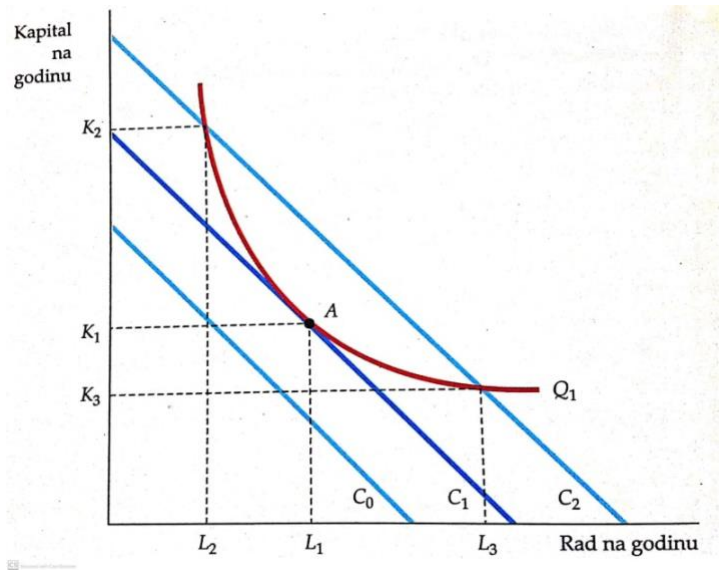
### 4.3. Pravci jednakih troškova (izotroškovni pravci)

„Izotroškovna crta prikazuje sve moguće kombinacije rada i kapitala koje se mogu kupiti uz neki zadani ukupni trošak.“ (Pindyck i Rubinfeld, 2005:217) Izotroškovni pravac daje opis kombinacija proizvodnih inputa koje poduzeće isto koštaju, to jest prikazuje koje kombinacije resursa poduzeće može kupiti za određeni novčani trošak. Za svaki taj iznos troškova se može utvrditi izotroškovni pravac te nagib pravca ovisi o cijenama resursa. Bez obzira iz kojeg izotroškavnog pravca na izotroškovnoj karti, nagib je jednak omjeru troškova po jedinici resursa (nabavnih cijena).



Graf 7. Prikaz izotroškavnog pravca (Izvor: Ferenčak, 2003)

Nagib izotroškavnog pravca se izračunava kao  $-\Delta K/\Delta L = -(w/r)$ , a iz tog omjera se može zaključiti da će ukupni trošak proizvodnje ostati nepromijenjen kada se tvrtka odrekne jedne jedinice rada u zamjenu za kupnju  $w/r$  jedinica kapitala po cijeni od  $r$  NJ po jedinici. Slijedi primjer izotroškavne karte na grafu 8.



Graf 8. Proizvodnja zadane razine proizvodnje uz minimalan trošak (Izvor: Pindyck i Rubinfeld, 2005)

Na grafu 8. izotroškovna crta  $C_1$  je tangenta na izokvantu  $Q_1$  u točki A te ona pokazuje da je uz minimalan trošak s inputom rada  $L_1$  i inputom kapitala  $K_1$  moguće postići razinu proizvodnje  $Q_1$ . Ostale kombinacije inputa omogućuju istu razinu proizvodnje, ali uz veći trošak.

#### 4.4. Optimalna upotreba faktora proizvodnje

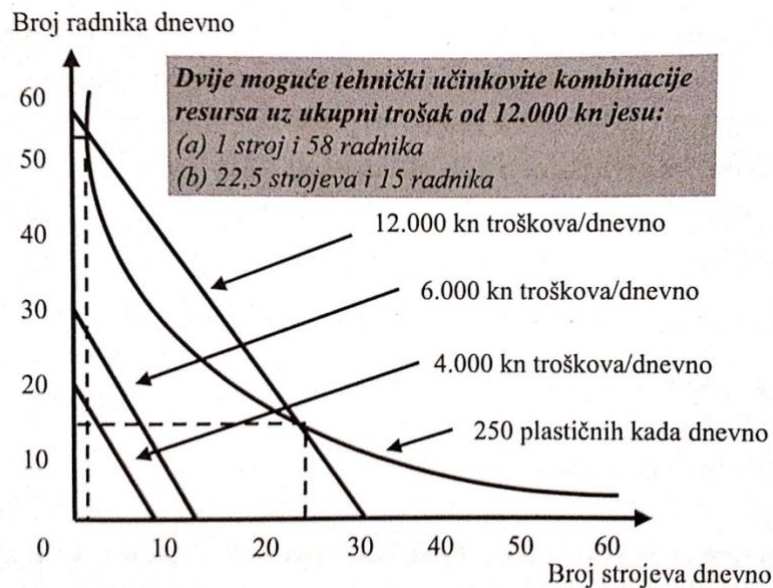
Određivanje optimalne upotrebe faktora proizvodnje jedan je od najbitnijih postupaka kako bi došlo do realizacije najvećeg mogućeg prihoda kojeg određeno poduzeće može ostvariti.

Proces određivanja optimalne upotrebe faktora proizvodnje sastoji se od sastavljanja tablice ili grafikona koji daje prikaz izokvante i izotroška. Na Tablici 2. prikazan je izračun ukupnih troškova proizvodnje 250 plastičnih kada s obzirom na raspoloživu tehnologiju. Pretpostavimo kako imamo 9 različitih tehnologija ili tehnika proizvodnje, podatke o trošku kapitala u kunama ( $K \times C_K$ ) te trošku rada ( $R \times C_R$ ) koji zajedno daju informacije o ukupnom trošku.

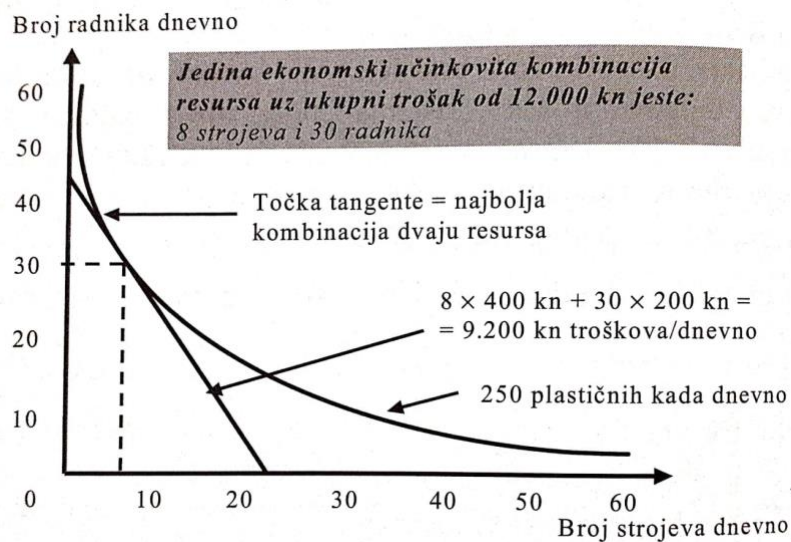
**Tablica 2. Izračun ukupnih troškova proizvodnje 250 plastičnih kada s raspoloživim tehnologijama (Izvor: Karić, 2010)**

<b>Tehnologija</b>	<b>Troškovi kapitala(kn)</b>	<b>Troškovi rada(kn)</b>	<b>Ukupni troškovi (kn)</b>
<b>1</b>	60 x 400	1 x 200	24.200
<b>2</b>	50 x 400	2 x 200	20.400
<b>3</b>	40 x 400	4 x 200	16.800
<b>4</b>	30 x 400	8 x 200	13.600
<b>5</b>	18 x 400	18 x 200	10.800
<b>6</b>	8 x 400	30 x 200	9.200
<b>7</b>	4 x 400	40 x 200	9.600
<b>8</b>	2 x 400	50 x 200	10.800
<b>9</b>	1 x 400	60 x 200	12.400

Analizom Tablice 2. može se primijetiti kako je ekonomski najpovoljnija i najisplativija kombinacija pod brojem 6. Prikaže li se navedeno izotroškovnim pravcem i izokvantom, kao što se može vidjeti na grafu 9, dobit će se prikaz tangiranja izotroškovnog pravca i izokvante. Karić (2010) sugerira kako izokvantna karta izražava proizvodnu funkciju određenog poduzeća na različitim razinama opsega proizvodnje te izokvante opisuju stanje tehnologije (metode proizvodnje). Izotroškovni pravci također ilustriraju odnos između količina dvaju resursa pri različitim ukupnim troškovima poduzeća. Uporabom izotroškovnih pravaca prikazuje se odnos cijena resursa. Optimalna upotreba faktora proizvodnje se lako određuje kada se kombiniraju izotroškovna karta i izokvante. Optimalna, tj. najbolja je kombinacija koja omogućava ispunjenje određenog opsega proizvodnje. Drugim riječima, ona koja tržištu daje potraživanu količinu proizvoda, uz najniže moguće troškove.



Graf 9. Traženje najbolje učinkovite kombinacije resursa za određeni opseg proizvodnje (250 kada dnevno) (Izvor: Karić, 2010)



Graf 10. Najbolja kombinacija resursa za određeni opseg proizvodnje (250 plastičnih kada dnevno) (Izvor: Karić, 2010)

Na grafu 10. Može se primijetiti da izotroškovni pravci za 4000 kn i za 6000 kn ne zahtijevaju dodatne iznose troškova kod proizvodnje 250 kada dnevno. Oba pravca prikazana ispod izokvante su primjereni isključivo za niže razine proizvodnje. Dostatan je treći izotroškovni pravac za 12000 kn jer presijeca izokvantu na dva mjesta, što znači da se s 15 radnika i 22,5 strojeva ili 58 radnika i 1 strojem može proizvesti količina od 250 kada dnevno. Također, svaki izotroškovni pravac koji se nalazi ispod pravca za 12000 kn troškova, a dostiže izokvantu koja ima opseg proizvodnje od 250 kada omogućuje proizvodnju od 250 kada

dnevno uz trošak koji iznosi manje od 12000 kn dnevno. Samo u točki gdje se dodiruju izotroškovni pravac i izokvante može se doći na višu razinu ukupnog troška kretanjem u oba smjera po izokvanti. Budući da je nagib izokvante negativna vrijednost stope tehničke zamjene rada kapitalom ( $-RTS_{LK}$ ), a nagib izotroškvnog pravca  $-P_L/P_K$ , Karić (2010) obznajući kako je uvjet za minimalizaciju troškova proizvodnje određenog opsega proizvodnje u dugom roku prikazan na sljedeći način:  $P_L/P_K = RTS_{LK}$  te se matematički to može izraziti i na dva druga načina:  $\Delta K/\Delta L = P_L/P_K$  ili  $P_K\Delta K = P_L\Delta L$ . Jednadžbe koje je autor definirao pokazuju kako na izbor najbolje moguće kombinacije resursa utjecaj imaju granična stopa tehničke zamjene promjenjivih resursa te cijene promjenjivih resursa. Naime, s mijenjanjem tehnologije poduzeće ima mogućnost mijenjanja jednog resursa za neki drugi resurs sve dok ostali resursi nisu prilagođeni minimalnim troškovima.



## 5. Rasprava

Proizvodna funkcija se zapisuje na sljedeći način:  $Q=F(K,L)$ . Dakle, kao što se može uočiti iz jednadžbe, output ovisi o jedinicama rada na kapitalu korištenom u proizvodnji.

Klasična proizvodna funkcija je kombinacija linearnog, degresivnog i progresivnog oblika proizvodne funkcije. Dvije veoma bitna stavke proizvodne funkcije su - ona se mora promatrati tako da se u obzir uzme određeno vremensko razdoblje (dugi ili kratki rok) te da je određena stanjem tehnologije. Određenost proizvodne funkcije tehnologijom u teoriji znači napredak tehnologije poduzeća koji po pravilu dovodi do više razine proizvodnje uz isti input. Svako poboljšanje tehnologije povećat će veličinu prihoda uz bilo koju varijaciju kombinacije inputa, mijenjajući tako proizvodnu funkciju, no promjene u tehnologiji ne moraju uvijek donositi veću kvalitetu ili pak proizvod. Kada govorimo o tehnologiji i njenoj primjeni u proizvodnoj funkciji, kako ističe Brajnović (2020), bitno je uočiti kako je uz identičnu tehnologiju moguće proizvesti isti output uz iskorištavanje različitih količina inputa, to jest inputi se mogu međusobno supstituirati. Prema primjeru kojeg daje Sabolić (2014), tehnologija i ljudski rad mogu se međusobno zamijeniti, korištenjem pedeset radnika s lopatama i jednog bagera moguće je dnevno iskopati jednaku količinu rovova kao i pomoću trideset radnika i dva bagera ili nekim drugim omjerom radnika i bagera. Jedna od nužnih i najbitnijih postavki realizacije najvećeg mogućeg profita je određivanje optimalne upotrebe faktora proizvodnje.

Izokvantna karta predstavlja proizvodnu funkciju za određeno poduzeće na različitim razinama opsega proizvodnje te se izokvante koriste za opisivanje stanja tehnologije. Izotroškovni pravci pokazuju odnos između količina dvaju resursa pri različitim ukupnim troškovima poduzeća. Odnos između cijena resursa opisan je pomoću pravaca jednakih troškova (izotroškovnih pravaca). Kada se izotroškovna karta i izotroškovni pravci spoje, veoma je lako odrediti optimalnu kombinaciju resursa za određeno poduzeće. Ona kombinacija, naglašava Karić (2010), koja daje mogućnost ostvarenja definiranog opsega proizvodnje uz najniže moguće troškove se naziva optimalnom upotrebom faktora proizvodnje. Nadalje, važno je napomenuti kako zamjenom rada za kapital proizvođači se mogu kretati s krajnjih tehnologija, posebice prema sve nižim izotroškovnim pravcima, uz konstantan opseg proizvodnje, sve do optimalne tehnologije koja u konačnici proizlazi najnižim mogućim troškovima. Karić (2010) također smatra kako odabirom optimalne kombinacije resursa koja odgovara željenoj količini proizvoda i tehnologiji koja je

definirana pomoću izokvante, uz cijene dostupnih resursa, nema potrebe za njezinom promjenom. Iako poprilično jednostavna za implementaciju, proizvodna funkcija je važna karika u poslovanju u kontekstu donošenja bitnih odluka, jer je ona ta koja dovodi do optimalnog rezultata proizvodnje te u konačnici željenog rezultata poduzeća u obliku maksimalizacije profita.

## 6. Zaključak

Proces u kojem dolazi do pretvaranja proizvodnih faktora u proizvode i/ili usluge naziva se proizvodnja. Inputi su faktori proizvodnje koji ulaze u proces stvaranja određenog proizvoda i/ili usluge, a output predstavlja gotov proizvod ili uslugu koji su rezultat svih kombiniranih faktora proizvodnje. Tehnološki odnos između inputa i outputa naziva se proizvodna funkcija, ona pokazuje funkcionalni odnos između inputa i outputa poduzeća u procesu proizvodnje. Bakalar (2009) funkciju proizvodnje objašnjava kao jednadžbu, tablicu ili grafikon koji daje prikaz maksimalne proizvodnje koje poduzeće može ostvariti u danom vremenskom periodu s različitim kombinacijama faktora te kako je to odnos između maksimalne proizvodnje nekog proizvoda i različitih kombinacija faktora proizvodnje pri poduzeću dostupnoj tehnologiji. Dvije bitne stavke proizvodne funkcije su: proizvodna funkcija se mora razmatrati s obzirom na određeno vremensko razdoblje, tj. na dugi ili kratki rok i proizvodna funkcija je određena stanjem tehnologije, što znači da s napretkom tehnologije poduzeća mogu postići više razine proizvodnje uz isti input. Prilikom odabira najpovoljnije kombinacije resursa, prvo odabiremo tehnički učinkovitu kombinaciju, a smatramo je tehnički učinkovitom ako niti jedna druga kombinacija ne može postići isti učinak uz manje uloženi resursa. Na temelju proizvodne funkcije, proizvođač donosi odluku koju će od raznih alternativa proizvodnje određenog proizvoda odabrati i upotrijebiti kako bi se proizvodnja ostvarila te u konačnici došlo do maksimizacije dobiti. Pindyck i Rubinfeld (2005) navode kako izokvanta povezuje sve moguće kombinacije inputa za koje je razina proizvodnje jednaka. Bitno je znati raspoznati kako izokvantna karta predočava proizvodnu funkciju s dva varijabilna faktora za sve količine proizvoda koje bi organizacija potencijalno proizvodila, dok izotroškovna karta nudi informacije o cijenama resursa koji su namijenjeni za upotrebu. Određivanje optimalne upotrebe faktora proizvodnje jedna je od najvažnijih i veoma potrebnih postavki za maksimiziranje profita te se određuje upravo preko izotroškovne karta i izokvante. Kada se spoje izotroškovna karta i izokvanta, optimalna upotreba faktora proizvodnje se lako određuje. Najbolja ili najisplativija kombinacija resursa je ona koja omogućava ispunjenje određenog opsega proizvodnje, tj. ona koja tržištu daje potraživanu količinu proizvoda, uz najniže moguće troškove.

## Literatura

Bakalar, J. (2009). *Mikroekonomija*. Sarajevo: HKD Napredak.

Brajnović, T. (2020). *Proizvodna funkcija i njezina primjena*. Završni rad. Sveučilište u Osijeku: Ekonomski fakultet u Osijeku

Ferenčak, I. (2003). *Počela ekonomike*. Osijek: Ekonomski fakultet u Osijeku.

Karić, M. (2010). *Mikroekonomika*. Osijek: Ekonomski fakultet u Osijeku.

Pindyck, R. S. and Rubinfeld, D. L. (2005). *Mikroekonomija*. Zagreb: Mate.

Sabolić, D. (2014). *Uvod u mikroekonomiku*. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu.

Žugaj, M. And Šehanović, J. And Cingula. M. (2004). *Organizacija*. Varaždin: TIVA tiskara.

## Popis tablica

Tablica 1. Proizvodnja s dva varijabilna faktora

Tablica 2. Izračun ukupnih troškova proizvodnje 250 plastičnih kada s raspoloživim tehnologijama

## Popis slika

Slika 1. Najjednostavnija forma proizvodne funkcije

## Popis grafikona

Graf 1. Linearna proizvodna funkcija s jednim promjenjivim resursom

Graf 2. Proizvodna funkcija s jednim promjenjivim resursom - opadajući prinosi

Graf 3. Proizvodna funkcija s jednim promjenjivim resursom - rastući prinosi

Graf 4. Prikaz izokvante

Graf 5. Proizvodnja s dva varijabilna faktora

Graf 6. Granična stopa granične supstitucije

Graf 7. Prikaz izotroškavnog pravca

Graf 8. Proizvodnja zadane razine proizvodnje uz minimalan trošak

Graf 9. Traženje najbolje učinkovite kombinacije resursa za određeni opseg proizvodnje (250 kada dnevno)

Graf 10. Najbolja kombinacija resursa za određeni opseg proizvodnje (250 plastičnih kada dnevno)