Modeli linearnog programiranja te njihova primjena u ekonomiji

Kovačević, Matko

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera

Ekonomski fakultet u Osijeku

Sveučilišni prijediplomski studij Ekonomija i poslovna ekonomija

Matko Kovačević

MODELI LINEARNOG PROGRAMIRANJA TE NJIHOVA PRIMJENA U EKONOMIJI

Završni rad

Osijek, 2024.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Ekonomski fakultet u Osijeku
Sveučilišni prijediplomski studij Ekonomija i poslovna ekonomija

Matko Kovačević

MODELI LINEARNOG PROGRAMIRANJA TE NJIHOVA PRIMJENA U EKONOMIJI

Završni rad

Kolegij: Kvantitativne metode za poslovno odlučivanje

JMBAG: 0010237021
e-mail: mkovacevic1@efos.hr
Mentor: prof. dr. sc. Martina Briš

Osijek, 2024.

Josip Juraj Strossmayer University of Osijek
Faculty of Economics and Business in Osijek
University Undergraduate Study Programme Economics and Business

Matko Kovačević

LINEAR PROGRAMMING MODELS AND THEIR APPLICATION IN ECONOMICS

Final paper

Osijek, 2024.

IZJAVA
O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI,
PRAVU PRIJENOSA INTELEKTUALNOG VLASNIŠTVA,
SUGLASNOSTI ZA OBJAVU U INSTITUCIJSKIM
REPOZITORIJIMA
I ISTOVJETNOSTI DIGITALNE I TISKANE VERZIJE RADA

1. Kojom izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je završni (navesti vrstu rada: završni/diplomski/specijalistički/doktorski) rad isključivo rezultat osobnoga rada koji se temelji na vlastitim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu. Potvrđujem poštivanje nepovredivosti autorstva te točno citiranje radova drugih autora i referiranje na njih.
2. Kojom izjavljujem da je Ekonomski fakultet u Osijeku, bez naknade u vremenski i teritorijalno neograničenom opsegu, nositelj svih prava intelektualnoga vlasništva u odnosu na navedeni rad pod licencom *Creative Commons Imenovanje – Nekomercijalno – Dijeli pod istim uvjetima 3.0 Hrvatska.*
3. Kojom izjavljujem da sam suglasan/suglasna trajnom pohranjivanju i objavljivanju mog rada u Institucijskom digitalnom repozitoriju Ekonomskoga fakulteta u Osijeku, Repozitoriju Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku te javno dostupnom Repozitoriju Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (u skladu s odredbama Zakona o visokom obrazovanju i znanstvenoj djelatnosti, NN 119/2022).
4. Izjavljujem da sam autor/autorica predanog rada i da je sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti istovjetan s dovršenom tiskanom verzijom rada predanom u svrhu obrane istog.

Ime i prezime studenta/studentice: Matko Kovačević
JMBAG: 0010237021
OIB: 80124553737
e-mail za kontakt: matko.kovacevic3@gmail.com
Naziv studija: Prijediplomski studij, smjer Ekonomija i poslovna ekonomija
Naslov rada: Modeli linearnog programiranja te njihova primjera u ekonomiji
Mentor/mentorica rada: prof.dr.sc. Martina Briš

U Osijeku, 20.9.2024. godine

Potpis Matko Kovačević

SADRŽAJ

1. UVOD 1

2. METODOLOGIJA RADA 2

2.1. Predmet istraživanja 2

2.2. Istraživačka pitanja 2

2.3. Metode istraživanja 2

2.4. Izvori podataka 2

3. OPERACIJSKA ISTRAŽIVANJA I MODELI ODLUČIVANJA 3

3.1. Povijesni osvrt na operacijska istraživanja 3

3.2. Pojmovno definiranje i klasifikacija modela odlučivanja 4

3.3. Proces izrade modela 5

4. LINEARNO PROGRAMIRANJE 8

4.1. Osnove linearnog programiranja 8

4.2. Metode rješavanja problema linearnog programiranja 13

5. MODELI LINEARNOG PROGRAMIRANJA 26

5.1. Transportni model 26

5.2. Model asignacije 31

5.3. Model prehrane 35

6. PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA U EKONOMIJI 37

6.1. Primjena u bankarskom sustavu 37

6.2. Primjena linearnog programiranja u marketingu 40

6.3. Optimiziranje odabira portfelja 44

7. RASPRAVA 47

8. ZAKLJUČAK 49

Popis slikovnih priloga 52

Popis tablica 53

SAŽETAK

Ovaj rad se bavi linearnim programiranjem koji pomaže prilikom optimizacije oskudnih resursa i donošenja odluka. Svrha rada je istražiti povijest, teorijske osnove, metode i modele linearnog programiranja. Cilj je bio obraditi osnovne metode linearnog programiranja, kao što su simpleks i grafička metoda, opisati modele koji se često koriste, kao što su primjerice transportni model, model asignacije i model prehrane.

Teorijska osnova ovoga rada uključuje povijesni razvoj operacijskih istraživanja, definiranje i klasifikacija modela odlučivanja te proces izrade modela. Primjenom analize i različitih metoda linearnih problema želi se prikazati važnost linearnog programiranja pri rješavanju stvarnih problema u gospodarskom i svakodnevnom životu.

Rezultati istraživanja pokazuju da se linearno programiranje može koristiti u različitim industrijama, ali i bankarstvu te marketingu. Simpleks metoda se koristi pri rješavanju složenih problema s mnogo varijabli, dok grafička metoda omogućava vizualizaciju analiziranih podataka. Za razliku od simpleks metode nedostatak ove metode je u ograničenom broju varijabli (2).

Na kraju, rad može biti koristan ljudima koji se bave ili žele naučiti nešto o optimizaciji i operacijskim istraživanjima te omogućiti im stjecanje novih znanja iz ovoga područja.

Ključne riječi: operacijska istraživanja, linearno programiranje, modeli linearnog programiranja, primjena u ekonomiji

SUMMARY

This paper deals with linear programming, which aids in the optimization of scarce resources and decision-making. The purpose of this paper is to explore the history, theoretical foundations, methods, and models of linear programming. The aim was to cover the basic methods of linear programming, such as the simplex and graphical methods, and to present models such as the transportation model, assignment model, and diet model.

The theoretical foundation of this work includes the historical development of operations research, the definition and classification of decision-making models, and the process of model creation. In doing so, I aimed to demonstrate the importance of linear programming in solving real-world problems in both economic and everyday life by applying analysis and different methods of linear problems.

The research results show that linear programming can be used in various industries, as well as in banking and marketing. The simplex method is used to solve complex problems with many variables, while the graphical method allows for the visualization of analyzed data. Unlike the simplex method, the drawback of the graphical method is its limitation to a small number of variables (2).

In conclusion, this paper can be useful for individuals who are involved in or wish to learn more about optimization and operations research, and it can enable them to acquire new knowledge in this field.

Keywords: operational research, linear programming, linear programming models, application in economic

1. UVOD

Linearno programiranje služi za optimizaciju procesa i donošenje najbolje odluke uz ostvarivanje maksimiziranje dobiti ili minimiziranje troška. Linearno programiranje još se naziva linearna optimizacija jer je jedan od najčešćih problema optimizacije. Linearno programiranje se uvodi početkom četrdesetih godina prošloga stoljeća i pomogao je u Drugom svjetskom ratu pri donošenju odluka vezanim za alokaciju ljudi, transport oružja i hrane. Istraživačima je razvoj računala omogućio da pomoću linearnog programiranja donose odluke s velikim brojem varijabli.

Linearno programiranje omogućava menadžerima da oskudne resurse raspodjele na najefikasniji način uz što manje gubitaka. Menadžer mora prilikom formulacije problema kao LP modela formulirati ga u matematički oblik tak što treba definirati varijable odlučivanja, funkciju cilja i ograničenja, prikazati varijable i ograničenja primjenom odgovarajućeg odnosa i provjeriti zadovoljenost ograničenja.

U ovom završnom radu će se u prvom poglavlju definirati i obraditi povijest operacijskih istraživanja, zatim će se definirati i opisati klasifikacija modela odlučivanja i na kraju objasnit proces izrade modela. U drugom poglavlju objasnit će se osnovni pojmovi linearnog programiranje i obrađene su metode linearnih programiranje (simpleks i grafička metoda). U trećem poglavlju su obrađene najčešće primjenjivi modeli linearnog programiranja, a to su transportni model, model asignacije i model prehrane. U zadnjem poglavlju su obrađeni modeli linearnog programiranja koji se primjenjuju u ekonomiji. Objašnjen je model koji je razvila CCB banka, model koji se može primijeniti u marketingu i model optimizacije portfelja.

2. METODOLOGIJA RADA

Metodologija ovog završnog rada temelji se na samoj analiza sekundarnih izvora podataka te praktičnih primjera primjene linearnih modela u ekonomiji.

2.1. Predmet istraživanja

Predmet istraživanja ovog rada jest naglasak na korištenju modela linearnog programiranja koje se koristi prilikom donošenja optimalnih odluka. Krenuvši od osnovnih ljudskih potreba, potreba organizacija pa sve do potreba na razini jedne ekonomije.

2.2. Istraživačka pitanja

Sljedeća istraživačka pitanja služila su kao smjernice odnosno kako bi se olakšalo istraživanje i pisanje rada.

Koje su osnovne metode linearnog programiranja? Na koji način se one primjenjuju u rješavanju linearnog programiranja?

Kako, na koji način te u koje svrhe se koristi simpleks metoda?

Kako, na koji način te u koje svrhe se koristi grafička metoda?

Kako modeli linearnog programiranja poput transportnog, modela asignacije te modela prehrane doprinose rješavanju određenih problema u ekonomiji?

Koja je svrha primjene modela linearnog programiranja u različitim sektorima u nekoj od organizacija (bankarstvo, marketing i optimizacija portfelja)?

2.3. Metode istraživanja

Pri istraživanju koristile su se sljedeće metode: metoda sinteze, metoda analize, deskripcije te usporedba različitih metoda i modela linearnog programiranja. Metodom deskripcije cilj je bio opisati važnost linearnog programiranja i samih modela linearnog programiranja koji se primjenjuju pri poslovnom odlučivanja i u ekonomiji. Metodom sinteze se sjedinilo u jednu cjelinu sve što se potrebno kako bi se prikazala svrha različitih metoda linearnog programiranja s ciljem pronalaženja optimalnih rješenja u različitim industrijama. Uz pomoć metode analize, analizirani su primjeri modela zadataka i korišten je Microsoftov alat Excel prilikom rješavanja zadatak uz pomoć grafičke i simpleks metode (alat Solver).

2.4. Izvori podataka

Prilikom pisanja završnog rada koristili su se sekundarni izvori podataka. Sekundarni izvor podataka čine knjige te znanstveni članci i publikacije sa interneta.

3. OPERACIJSKA ISTRAŽIVANJA I MODELI ODLUČIVANJA

Ovo poglavlje sastoji se od tri dijela. U prvom dijelu objašnjena su operacijska istraživanja i napravljen je povijesni osvrt. U drugom dijelu su definirani modeli i napravljena je njihova podjela i u zadnjem dijelu je opisan proces izrade modela.

3.1. Povijesni osvrt na operacijska istraživanja

Prema Kalpić, Mornar (1996;1), „operacijska istraživanja (engl. *Operations* ili *Operational Research)* jesu stručna i znanstvena disciplina koja se bavi pomaganjem kod donošenja odluka na bazi egzaktnih metoda."

Operacijska istraživanja kao pojam se uvode 1939. godine od strane prof. Patrick Maynarda Stuart Blacketta. Operacijska istraživanja se primjenjuju na mnogim područjima kao npr. u proizvodnji, transportu, financijskom planiranju, graditeljstvu, zdravstvu, komunikaciji i vojsci. Iste te godine ruski matematičar i statističar Leonid Vitaljevič Kantrovič objavljuje knjigu na temu operacijskih istraživanja na ruskom jeziku, a zajedno sa Tjalling Koopmansom je pomogao pri razvoju linearnog programiranja i doprinio teoriji optimalne alokacije resursa za što su dobili i dobivaju 1975. godine Nobelovu nagradu iz područja ekonomije (Jergović, 2015:6).

Početkom drugog svjetskog rata, Velika Britanija bila je suočena s moćnijim neprijateljem. Kako bi bili što efikasniji u ratovanju, morali su oskudne resurse rasporediti na što pametniji način. Kako bi ispunili taj cilj vojska je formirala grupu stručnjaka iz različitih područja. Glavna zadaća stručnjaka je bila pravilna raspodjela resursa i pomaganje u donošenju odluka tijekom ratovanja Kalpić i Mornar (1996:1).

Kalpić i Mornar (1996:1) navode sljedeće rezultate koje su stručnjaci postigli tijekom rješavanju problema:

1. Analizirajući podatke o napadima i utvrđivanjem kada su se napadi najčešće se događali i na koji način od strane britanske avijacije na njemačke podmornice, britanski stručnjaci su promijenili način tempiranja bombi i povećali su svoju efikasnost za 700%.
2. Zbog potrebe da se preveze materijal iz Amerike u Europu uz pomoć konvoja stručnjaci su morali odrediti optimalnu veličinu konvoja kako bi gubitci tijekom napada na te konvoje bili što manji.

3. Razvijene su metode za bolju upotrebu radarske mreže sa svrhom sprečavanja neprijateljskog djelovanja (odnosi se na aktivnosti mornaričkih plovila poput gađanja neprijateljskih oruđa i slično).

Operacijska istraživanja nakon završetak rata nastavila se primjenjivati u vojsci . Primijećeno je da postizanje što veće efikasnost i boljih rezultata na tržištu sadrže strategije i taktike, a uspjeh ovisiti o pravim odlukama. Operacijska istraživanja su se pokazala izuzetno korisnima u donošenju odluka i rješavanju problema koristeći se podacima, a ne intuicijom. Metode i postupci operacijskih istraživanja nakon Drugog svjetskog rata pronalaze civilnu primjenu kao pomoć pri donošenju poslovnih odluka (Kalpić, Mornar, 1996:1).

Gorge Dantzig razvija 1947. simpleks metodu za rješavanje problema linearnog programiranja, a 1950. se razvijaju metode dinamičkog programiranja, teorija repova čekanja i teorija zaliha. Ove su metode temelj današnjih operacijskih istraživanja. Kao posljedica razvoja informatike i pojave osobnih računala, osamdesetih godina prošloga stoljeća dolazi do razvoja operacijskih istraživanja. Bez računala bilo bi skoro pa nemoguće rješavati kompleksne matematičke modele, tipične za operacijska istraživanja (Perić, 2020:3).

Prema Barkoviću (1994:112) tijekom godina operacijska istraživanja doživjela veliki napredak i do danas su razvijeni mnogi modeli poput matematičkih modela, modeli transporta, grafova, zaliha, repova čekanja i drugi.

3.2. Pojmovno definiranje i klasifikacija modela odlučivanja

H. J. Weiss i M. E. Gershon (1989:25) definiraju model kao reprezentaciju sustava koji se ispituje, a razlog uporabe vide u manjoj kompliciranosti od realnih sustava što omogućava lakše manipuliranje i ispitivanje samog modela. (Skoko, 1999:201) ovo možda malo drugačije citirati

Skoko (1999:208) modele odlučivanja definira kao modele koji koriste algoritme za pronalaženje optimalnog rješenja. Pod optimalnim rješenjem se smatra ono rješenje koje je najbliže formuliranoj funkciji cilja. Optimalno rješenje, ovisno o funkciji cilja može biti ekstremno (npr. minimiziranje troškova ili maksimalizacija dobiti/profita) ili fiksirana veličina (npr. stope rasta). Najčešće primjenjiv model odlučivanja je model linearnog programiranja.

Brajdić (2006:6-8) je modele odlučivanja podijelio u dva kriterija:

1.Podjela po cilju upravljanja:

a) prediktivni modeli
b) modeli evaluacije
c) modeli optimizacije

2. Podjela po uvjetima (okolnostima) odlučivanja:

a) modeli odlučivanja u uvjetima sigurnosti
b) modeli odlučivanja u uvjetima rizika
c) modeli odlučivanja u uvjetima nesigurnosti

Od svih gore nabrojanih modela, modeli koji se nadovezuju za ovaj rad su modeli optimizacije i modeli odlučivanja u uvjetima sigurnosti jer se fokusiraju na traženja optimalnog rješenja i korištenje modela linearnog programiranja te će se oni obraditi u nastavku ovoga rada.

3.3. Proces izrade modela

Kako bi se za određen problem našlo rješenje mora se provesti postupak modeliranja, koji rezultira modelima odlučivanja (Brajdić, 2006:3).

Skoko (1999:201) definira modeliranje kao „postupak u kome jedan sustav koji se naziva original, prikazujemo (modeliramo) drugim sustavom, koji se naziva model, ukazujući kod toga kako je modeliranje (posebno složenih dinamičkih sustava) vrlo kompliciran posao, što znači da se moramo zadovoljiti aproksimacijama, ali koje jasno, dovoljno dobro oslikavaju modelirani sustav."

Svrha modeliranja prema Brajdiću (2006:3,4) da se problem preformulira polazeći od nekih njegovih bitnih značajki s ciljem jednostavnijeg rješavanja na način da uz pomoć preformulacije bude razumljiviji i da se pronađe što lakša i pouzdana metoda kako bi se model riješio. Na taj način može se doći do različitih modela među kojima se ističu matematički modeli koji uz pomoć matematičkog jezika opisuju problem tj. umjesto riječi i rečenica se koriste matematički simboli i formule.

„Funkcija čiji se ekstrem želi odrediti obično ima određeno značenje (minimiziranje troškova, maksimalizacija profita), dok ograničenja, najčešće u obliku nejednadžbi ili jednadžbi, predstavljaju tehnološke, tržišne i druge uvjete za zadani problem. To znači da se između mnogih varijanata koje mogu biti rješenja određenog problema nastoji pronaći najbolja, optimalna po nekom kriteriju“ (Neralić,2003:1).

Falak (2014:2) definira matematičko modeliranje kao „postupak opisivanja realnog sustava matematičkim jednadžbama s ciljem razvoja i uporabe matematičkog modela za kasnije analize, projektiranja i optimiziranja sustava za izrađeni model. Ono ne mora nužno riješit problem, ali će vjerojatno rasvijetliti i pojasniti promatranu situaciju“.

Postoji nekoliko motiva za izgradnju takvih modela: (Williams, 2013:3)

1. Sama izrada modela često otkriva odnose koji nisu bili očiti mnogim ljudima. Kao rezultat, postiže se veće razumijevanje objekta koji se modelira.
2. Nakon izrade modela obično je moguće analizirati ga matematički kako bi se predložili smjerovi koji inače ne bi bili očiti.
3. Eksperimentiranje je moguće s modelom, dok često nije moguće ili poželjno eksperimentirati s objektom koji se modelira. Jasno je da bi bilo politički teško, kao i nepoželjno, eksperimentirati s nekonvencionalnim ekonomskim mjerama u zemlji ako postoji velika vjerojatnost katastrofalnog neuspjeha. Provođenje takvih hrabrih eksperimenata bilo bi više (iako ne potpuno) prihvatljivo na matematičkom modelu.

Prilikom obavljanja kvantitativne analize sustava iz stvarnog svijeta, treba izraditi matematički model sustava. Prilikom izrade modela zapostavljaju se mnoge informacije i zavisnosti jedna o drugoj te se u model unose samo veličine i veze za koje se smatra da su vjerodostojne kako bi se došlo do rješenja problema zbog kojeg se model izrađuje. Veze i zavisnosti u realnom svijetu su često nelinearne i nedeterminističke. Iz toga razloga je važno procijeniti ili kvantitativnim metodama odrediti točnost podataka i tek onda se mogu pojednostaviti međusobne veze i zakonitosti.(Kalpić, Mornar, 1996:2).

Važno je shvatiti iako se modeli temelje na podacima, oni zapravo predstavljaju odnose među varijablama koje su neovisni o podacima u modelu, tj. modeli se mogu primijeniti na različite situacije s različitim ulaznim podacima poput troškova, a da zadržavaju svoju osnovnu strukturu i ako se neki parametri promijene model i dalje ostaje isti jer odnosi među varijablama ostaju nepromijenjeni. Radikalne promjene u podacima obično bi se smatrale promjenom odnosa, a time i modela. (Williams, 2013:3)

Kako je navedeno u knjizi Kalpić i Mornar (1996:3-4), navedeno je 10 principa modeliranja:

1. Ne izrađivati kompliciran model ako i jednostavan može poslužiti.
2. Ne podešavati problem da bi odgovarao tehnici rješavanja.
3. Postupak stvaranja zaključaka o modelu mora biti rigorozan.
4. Model treba provjeriti prije ugradnje.
5. Model ne treba nikad shvaćati suviše doslovno.
6. Ne treba očekivati da model rješava probleme za koje nije bio projektiran.
7. Ne treba pretjerati s prodavanjem istog modela.
8. Znatne su koristi već od same izrade modela.
9. Model ne može biti bolji od ulaznih informacija.
10. Modeli ne mogu nadomjestiti donosioca odluke.

4. LINEARNO PROGRAMIRANJE

4.1. Osnove linearnog programiranja

Problem linearnog programiranja je specijalan slučaj problema matematičkog programiranja, u kojem je funkcija cilja linearna, a ograničenja su izražena u obliku linearnih jednadžbi i/ili nejednadžbi (Neralić, 2003:81).

Kao začetnike linearnog programiranja se uzimaju Leonid Vitaljevič Kantrovič i Tjalling Koompmans. Linearno programiranje se zove tako, zato što se optimizacijski kvantitativni model sastoji od linearnih funkcija, a riječ programiranje, kako je navedeno, ne odnosi se na programiranje u nekom programskom jeziku (Šimunović, Havrlišan, 2019:10).

Linearno programiranje se koristi kako bi se optimizirao problem u svim granama industrije, a primjenjuje se također i u bankarstvu, šumarstvu, u naftnoj industriji, poljoprivredi, prometu, zdravstvu itd. (Perić, 2020:13).

Brajdić (2006:13) navodi sljedeće prednosti linearnog programiranja:

1. jednostavan proces modeliranja
2. jednostavna struktura modela
3. jednostavan algoritam za rješavanje modela
4. jednostavna teorija, a to su osnovni pojmovi iz linearne algebre
5. elementarne metode rješavanja nekih problema s vizualizacijom apstraktnih pojmova iz teorije
6. opće primjenjiva metoda
7. povijesno su prvi
8. ti modeli obuhvaćaju probleme alokacije resursa, a to su problemi s kojima se najčešće susreću manageri

Postoje dvije osnovne vrste modela linearnog programiranja: (Perić, 2020:16)

- maksimum i
- minimum

Postoje tri tipa problema linearnog programiranja: (Perić, 2020:16)

- standardni oblik modela linearnog programiranja kojeg karakterizira:
    - kod linearnog modela maksimuma sva ograničenja su izražena nejednadžbama oblika manje ili jednako
    - kod linearnog modela minimuma ograničenja su izražena nejednadžbama veće ili jednako
    - kod problema maksimuma sve relacije u ograničenjima su $\leq$, a kod problema minimuma $\geq$
- Opći oblika karakterizira
    - Kod modela minimum i maksimum kombinacija ograničenja je manje ili jednako, jednako i veće ili jednako
- Kanonski oblik karakterizira:
    - Kod problema minimum i maksimum sva su ograničenja u obliku jednadžbi

Prema Šimunović, Havrlišan (2019:10-11), ¸zadaća linearnog programiranja je postići određeni cilj (iskazuje se u matematičkom obliku) tj. pronaći optimalno rješenje uz postavljena ograničenja. Ograničenja su sve ono što čovjeka ograničava pri donošenju odluka i ona se izražavaju matematički kao linearne funkcije.

Prema prethodno navedenim autorima matematički model se može postaviti kroz dva koraka (Šimunović, Havrlišan; 2019:10-11):

1. raščlanjivanje problema

- u ovome koraku traži se:
    a) koji je cilj?
    b) Koje su varijable potrebne?
    c) Koja su ograničenja?

2. matematičko opisivanje problema

- u ovom koraku se definiraju:
    a) strukturne varijabli *(engl. decision variables)*(varijable odlučivanja, stvarne, realne varijable, strukturne varijable ili varijable originala (primala)) i dodjeljuje im se naziv koji može biti skraćenica značenja varijable. Predstavlja količinu kojom upravlja donositelj odluka i označavaju se matematičkim simbolima

b) funkcija cilja je linearna funkcija n varijabli (svaki član u funkciji je umnožak konstante i jedne varijable odlučivanja) za koju treba odrediti ekstremnu vrijednost (minimum ili maksimum) na skupu mogućih dopustivih rješenja S definiranom skupom ograničenja (Perić, 2020:13).
c) ograničenja se izražavaju u ovisnosti o varijablama čije jedinice mjere ne moraju biti iste za sva ograničenja. Oni predstavljaju skup jednadžbi ili nejednadžbi koje predstavljaju fizička, ekonomska, tehnološka, pravna, etička ili druga ograničenja gdje se brojčane vrijednosti mogu dodijeliti varijablama odlučivanja.

Standardni problem linearnog programiranja zapisuje se na sljedeći način (Neralić:81-83):

a) funkcija cilja:

Max/min $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$

Skraćeni zapis: $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Funkcija cilja z(x1,x2…,xn) koja se maksimizira ili minimizira je u linearnom obliku gdje cj, j=1,2,…,n koeficijent ili parametar funkcije cilja po jedinici j-te varijable , a xj, j=1,2,…,n strukturne varijable.

b) ograničenja:

1. ograničenje: $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \leq = \geq b_1$
2. ograničenje: $a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \leq = \geq b_2$

$\vdots$

m-to ograničenje: $a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \leq = \geq b_m$

Skraćeni zapis

1. ograničenje: $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \leq = \geq$ b_1

2. ograničenje: $\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \leq = \geq$ b_2

m-to ograničenje: $\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \leq = \geq$ b_m

Zapis za sva ograničenja istovremeno:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq = \geq \ b_i \text{ ; i} = 1,2,\dots,\text{m}$$

Kod ograničenja koeficijent aij, i=1,2,…,m, j=1,2,…,n predstavlja količinu i-tog ograničenje potrebnog za jedinicu j-te varijable odlučivanja koja se nalazi na lijevoj strani nejednadžbe/ograničenja, a koeficijent bi, i=1,2,…,m veličinu ograničavajućeg faktora desne strane nejednadžbe/ograničenja (Perić; 2020:17).

c) uvjet ne-negativnosti:

$x_1,x_2,\dots,x_n \geq 0$

Skraćeni zapis:

$x_j \geq 0$, j=1,2,…,n

Standardni problem linearnog programiranja u matričnom obliku zapisuje se na sljedeći način (Šimunović, Havrlišan, 2019:12-13):

a) funkcija cilja:

Max/min Z= C · X

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

b) ograničenja

A ·X≤ = ≥ B

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

c) uvjet ne-negativnosti:

X ≥ 0

Uvjet ne-negativnosti treba biti uvijek zadovoljen i nikada ne smije biti manja od nule.

U linearnom programiraju postoje dvije vrste problema, a to su primal (originalni problem) i dual (dualni problem). U standardnom obliku linearnog programiranja primal je problem maksimuma, a dual je problem minimuma. U sljedećoj tablici će biti prikazana usporedba originalnog i dualnog problema (Zadravec, 2019:11).

Slika 1. Usporedba originalnog standardnog problema maksimuma i njegovog duala (izvor: Zadravec,2019:11)

	Originalni problem (Max)	Dualni problem (Min)
Funkcija cilja	$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\sum_{j=1}^{m} y_i b_i$
Ograničenja	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq = \geq b_i$; i = 1,2, … , m	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \leq = \geq c_j$; j = 1,2, … , n
Uvjet nenegativnosti	$x_j \geq 0$, j=1,2,…,n	$y_i \geq 0$, i=1,2,…,m
Matrični zapis funkcije cilja	Max $C^T X$	Min $Y^T B$
Matrični zapis ograničenja	AX≤B	$Y^T A \geq C^T$
Uvjet nenegativnosti	X≥0	Y≥0

Slika 2. Pretvaranje primala u dual (izrada autora)

Originalni problem	Dualni problem
Max Z= $645x_1+1355x_2$	Min Z= $100y_1+200y_2+250y_3$
$x_1+x_2 \leq 100$	$y_1+3y_2+y_3 \geq 645$
$3x_1+1x_2 \leq 200$	$y_1+y_2+3y_3 \geq 1355$
$1_{x1}+3x_2 \leq 250$	$y_1,y_2, y_3 \geq 0$
$x_1,x_2 \geq 0$	

Između originalnog problema standardnog problema maksimuma i njegovog duala, standardnog problema minimuma, postoji jednostavna simetrija. Parametar X kod originalnog problema zamjenjuje se parametrom Y u dualnom problemu. Parametar B koji se nalazi s desne strane ograničenja kod originalnog problema zamjenjuje se parametrom C koji zamjenjuje njegovo mjesto u ograničenjima u dualnom problemu. Znak $\leq$ kod problema maksimuma zamjenjuje se znakom $\geq$ kod problema minimuma. Dual standardnog problema maksimuma je standardni problem minimuma, i obrnuto (Brajdić, 2006:28-29).

4.2. Metode rješavanja problema linearnog programiranja

U ovom poglavlju će se pojasniti metode koje pomažu u rješavanju problema linearnog programiranja. Objasnit će se grafička i simpleks metoda. Grafička metoda je korisna zbog vizualizacije podataka, ali je ograničena samo s dvije varijable. Simpleks metoda je korisna za rješavanje linearnih problema s puno varijabli i ograničenja.

4.2.1. Simpleks metoda

Brajdić (2006:97) navodi kako se još nije pronašlo analitičko rješenja općeg problema linearnog programiranja. Tako nealternativna pronalaženja analitičkih rješenja dovela su do usavršavanja velikog broja numeričkih metoda, od koji niti jedna ne rješava problem u jednom koraku. Takve metode se zovu iterativne, tj. polaze od nekog mogućeg rješenja da bi ga u nizu koraka poboljšavale dok se ne dođe do optimalnog rješenja ili se utvrdi da takvo rješenje ne postoji.

G.B. Dantzig 1947. godine razvija simpleks metodu, a rad o njoj je objavio tek 1951. godine u Koopmansovoj knjizi *Activity Analysis* (Martić, 1966:104). Ona je vrlo često korištena metoda kako bi se riješio problema linearnog programiranja.

Neralić (2003:95) definira simpleks metodu kao opću, iterativnu i konačnu metodu za rješavanje problema linearnog programiranja. Kao opća metoda, ona rješava svaki problem linearnog programiranja. Kao iterativna metoda, ona provodi niz iteracija ili koraka, počevši od nekog baznog mogućeg rješenja pa sve do optimalnog rješenja ako postoji. Kao konačna metoda, ona rješava problem linearnog programiranja u konačnom broju iteracija tj. koraka. Simpleks metoda polazište nalazi u baznom mogućem rješenju i kriterijem optimalnosti ispituje je li rješenje optimalno. Ako je rješenje optimalno zadatak je završen. U slučaju da rješenje nije optimalno, pronalazi se novo moguće rješenje (koje odgovara susjednoj ekstremnoj točki), u kojem funkcija cilja poprima bolju vrijednost (manju za problem minimuma, odnosno veću za problem maksimuma), i provjerava je li ono optimalno. Postupak se ponavlja sve dok ne dobijemo optimalno rješenje.

Prema Brajdiću (2006:97) simpleks metoda predstavlja neku vrstu kompromisa između dvije krajnosti. Prva je da se optimalno rješenje nađe u jednom koraku, a druga da se ispitaju sva bazična rješenja kako bi bili sigurni da je nađeno optimalno rješenje zaista optimalno.

Sljedeći primjer zadatka riješit će se simpleks metodom uz pomoć Excel Solvera, a kasnije u radu i pomoću grafičke metode i biti će detaljno opisan.

Prijenosna računala tipa O postižu prodajnu cijenu od 700 NJ po komadu, zahtijevaju 3 sata rada u odjelu za pripremu i 1 sat rada u odjelu sastavljanje. Laptopi tipa G postižu prodajnu cijenu od 1400 NJ, provode 1 sata u odjelu za pripremu i 3 sata u odjelu za sastavljanje. Sat rada odjela za pripremu košta 15 NJ, dok sat rada odjela za sastavljanje košta 10 NJ. Zna se da se na tržištu može plasirati najviše 100 prijenosnih računala, te da je raspoloživo najviše 200 sati pripremnog odjela i 250 sati odjela za sastavljanje. Potrebno je odrediti proizvodni program koji daje maksimalnu razliku između prihoda od prodaje i direktnih troškova izrade.

1. Korak je postavljanje funkcije cilja, restrikcija i ograničenja:

Linearno programiranje							
Standardni problem maksimuma							
Varijable odlučivanja							
X_1	količina proizvodenj prijenosnih računala O						
X_2	količina proizvodenj prijenosnih računala G						
	O	G					
	X_1	X_2					
Dobit	645	1355	max				
R_1	1	1	≤	100			
R_2	3	1	≤	200			
R_3	1	3	≤	250			
Funkcija cilja							
max	dobit	645	X1	+	1355	X2	
Restrikcije							
R1	1	X1	+	1	X2	≤	100
R2	3	X1	+	1	X2	≤	200
R3	1	X1	+	3	X2	≤	250
Uvjet nenegativnosti							
X1,X2≥0							

Slika 3. Postavljanje funkcije cilja, restrikcija i uvjeta nenegativnost (izvor: izrada autora)

Funkcija cilja se dobije na sljedeći način:

Max Z = 700-(3*15+1*10)*x_1+1400-(1*15+3*10)*x_2

Prodajna cijena televizora A i B oduzima se od vremena i troškova sastavljanja i pripreme.

2. korak: postavljaju se varijable i pozivaju se (x_1 i x_2) i upisuju se nule

16	Varijable	
17	X1	0
18	X2	0
19		

Slika 4. Postavljanje varijabli (izvor: izrada autora)

3. Funkcija cilja: iz gore naveden funkcije cilja se pomnože s varijablama (x_1,x_2) i dobije se nula.

4. Restrikcije: gore navedene restrikcije se pomnože s varijablama (x_1,x_2) i dobije se rezultat nula.

R1 – količina prijenosnih računala koja mora biti plasirano na tržište

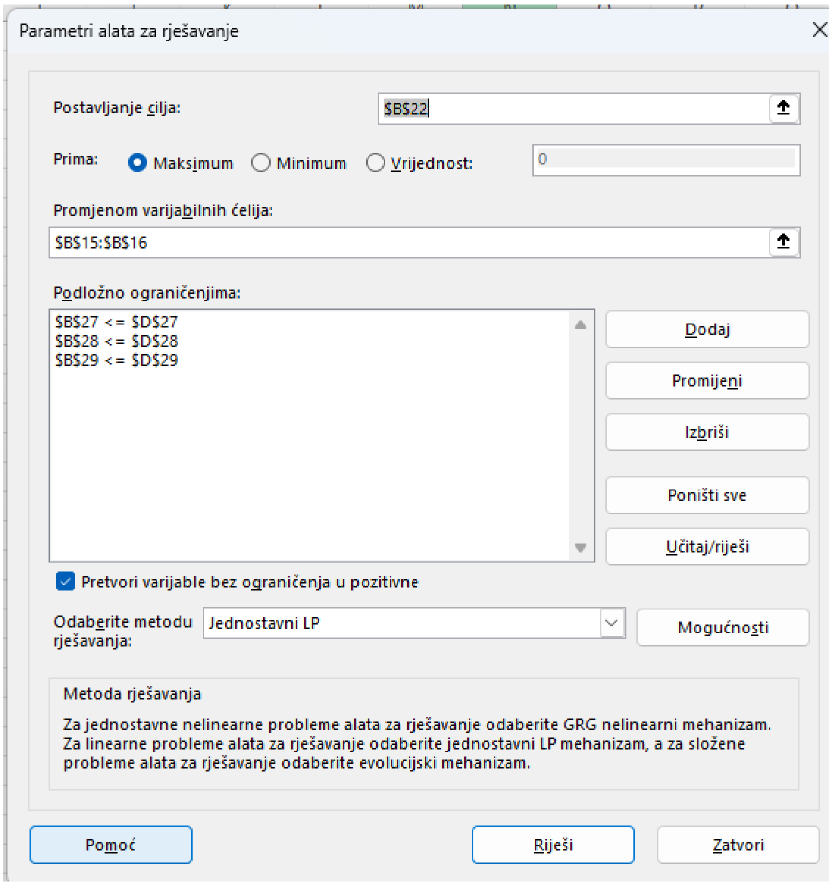
R2 – pripremni odjel

R3 – odjel za sastavljanje.

fja cilja			
maxz	0		
restrikcije			
r1	0	≤	100
r2	0	≤	200
r3	0	≤	250

Slika 5. Postavljanje funkcije cilja i restrikcija (izvor: izrada autora)

5. Postavljanje uvjeta u alatu za rješavanje



Slika 6. Podaci u solveru(izvor: izrada autora)

6. prikaz rješenja

varijable			
x1	25		
x2	75		
fja cilja			
maxz	117750		
restrikcije			
r1	100	≤	100
r2	150	≤	200
r3	250	≤	250

Slika 7. Rješenje zadatka (izvor: izrada autora)

4.2.2. Grafička metoda

Linearni programi su jednostavni za rješavanje zbog svoje jednostavne geometrijske strukture. Rješenje linearnog programa je bilo koji skup numeričkih vrijednosti varijabli. Te vrijednosti ne moraju biti optimalne niti zadovoljavati ograničenja ili imati logičan smisao. (Josepha S. Martinicha, 14)

Brajdić (2006:97) navodi kao prednost grafičke metode psihološku narav, tj. da se njihovom vizualizacijom ljudima lakše prikazuju apstraktne značajke linearnog programiranja koje uključuje potreban matematički alat i karakteristične algoritme simpleks metode. Kao nedostatke navodi da se može koristiti samo u slučaju kada ima dvije varijable i da se problem linearnog programiranja može riješit učinkovitije općim metodama linearnog programiranja.

Šimunović, Havrlišan (2019:25) navode kako se grafička metoda može koristiti i kada postoje tri varijable. Tada se ograničenja prikazuju u trodimenzionalnom prostoru (Kartezijev koordinatni sustav) onda je rješavanje kompleksnije. Kod problema s dvije varijable koristi se koordinatni sustav s dvije osi u kojemu su ograničenja prikazana pravcima. Zbog uvjeta nenegativnosti prikazuje se samo pozitivni dio osi. Ograničenja koja su obliku nejednadžbe prikazuju se kao pravci koji razgraničavaju ravninu na rješenja koja zadovoljavaju i ne zadovoljavaju nejednadžbu. Područje mogućih rješenja nastaje presjekom rješenja svih ograničenja. Vršne točke područja su osnovana moguća rješenja gdje je jedno od osnovnih rješenja optimalno, a to ovisi o funkciji cilja. Rješenja na presjecima dvaju ograničenja ili na presjeku ograničenja s koordinatnim osima, a nalaze se izvan područja u kojima su moguća rješenja, predstavljaju osnovna nemoguća rješenja.

Grafičkom metodom i prikazivanjem ograničenja i funkcije cilja daje se jasna sliku o skupu mogućih rješenja, načinu na koji se utvrđuje optimalno rješenje i istoj ovisnosti o promjeni parametara u zadatku.

Zadatak koji je bio i rješavan simpleks metodom, sada će se riješit i grafičkom metodom u Excelu. Zadatak je riješen u sljedećim koracima:

1. Definiranje varijabli odlučivanja

X_1 – količina proizvodnje prijenosnog računala tipa O

X_2 – količina proizvodnje prijenosnog računala tipa G

2. Definiranje funkcija cilja

Cilj poduzeća je kako je u zadatku navedeno odrediti proizvodni program koji daje maksimalnu kontribuciju ili doprinos za pokriće.

$$\text{Max } Z = 700-(3*15-1*10)*x_1+(1400-(1*15-3*10))*x_2$$

$$\text{Max } Z = 645\ X_1 + 1355\ X_2$$

3. Definiranje ograničenja (restrikcija)

R_1: $x_1+x_2 \leq 100$

R_2: $3x_1+1x_2 \leq 200$

R_3: $1x_1+3x_2 \leq 250$

Uvjet nenegativnosti govori da x_1 i x_2 ne mogu biti manje od 0, ali mogu biti 0. u slučaju da su x_1 i x_2 0 to znači da se proizvod ne treba proizvoditi (u ovom slučaju odnosi se na prijenosna računala)

Linearno programiranje							
Standardni problem maksimuma							
Varijable odlučivanja							
X_1	količina proizvodenj prijenosnih računala O						
X_2	količina proizvodenj prijenosnih računala G						
	O	G					
	X_1	X_2					
Dobit	645	1355	max				
R_1	1	1	≤	100			
R_2	3	1	≤	200			
R_3	1	3	≤	250			
Funkcija cilja							
max	dobit	645	X1	+	1355	X2	
Restrikcije							
R1	1	X1	+	1	X2	≤	100
R2	3	X1	+	1	X2	≤	200
R3	1	X1	+	3	X2	≤	250
Uvjet nenegativnosti							
X1,X2≥0							

Slika 8. Postavljanje varijabli, funkcije cilja, restrikcija i uvjet nenegativnosti (izrada autora)

4. Korak priprema za grafički prikaz

6	Pripema za grafički prikaz				
7					
8		X1	X2	X1	X2
9	R1	0			0
0	R2	0			0
1	R3	0			0
2					

Slika 9. Priprema za grafički prikaz (izvor: izrada autora)

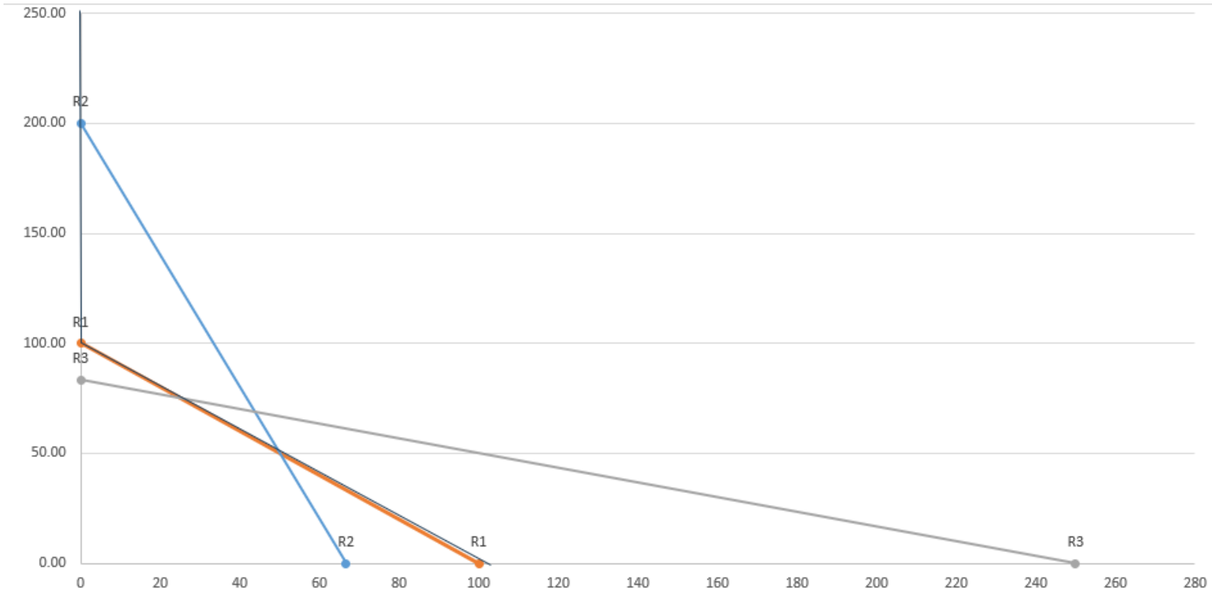
Prvi korak je da se napravi tablica i u vanjske stupce upišu se nule. Prazna polja tj. unutrašnji dio u tablici se dobije tako što se u ograničenjima desna strana podijeli sa traženim koeficijentom (npr. kod R2, 200 dijelimo s 3 kako bi dobili X_1, a 200 dijelimo sa 1 kako bi se dobio X_2)

	X1	X2	X1	X2
R1	0	100.00	100.00	0
R2	0	200.00	66.67	0
R3	0	83.33	250.00	0

Slika 10. Rješenje pripreme za grafički prikaz (izvor: izrada autora)

5. Grafički prikaz restrikcija

Koordinate iz prethodne tablice se unose na grafikon (Umetanja, grafikon raspršeni s ravnim crtama i oznakama, dizajn, odabir izvora podataka).



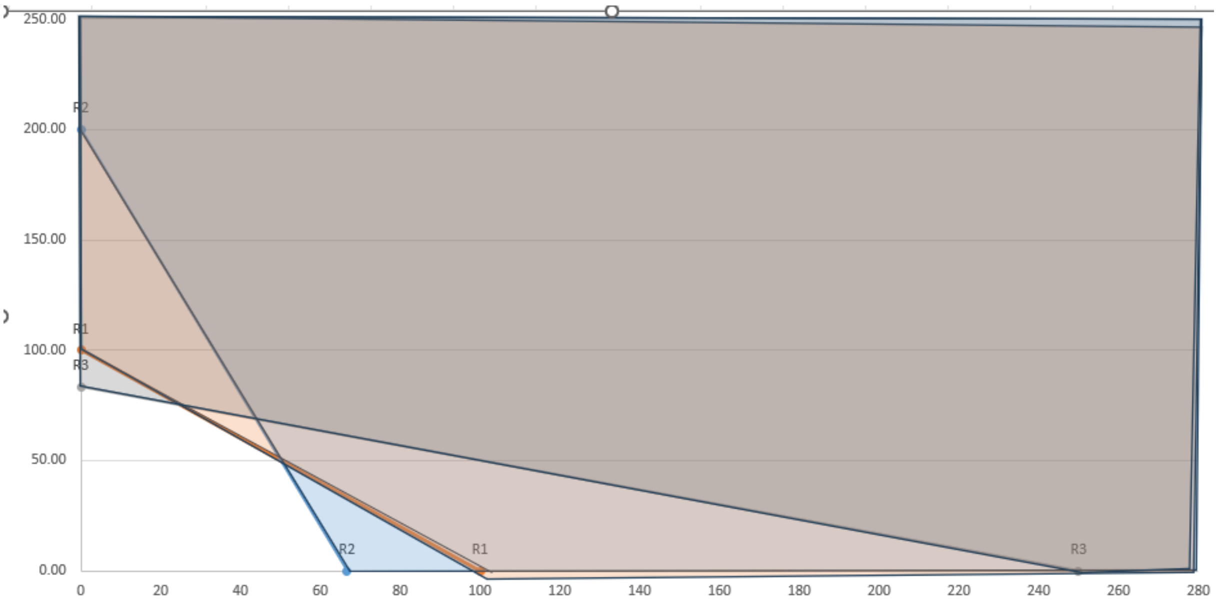
Slika 11. Grafički prikaz restrikcija (izvor: izrada autora)

6. Određivanje dopuštenog područja

Kako bi se odredile točke rješenja, potrebno je odrediti nedopuštena područja restrikcija. Restrikcije se pomnože s nulama i provjeravaju se uvjeti (odnos između lijeve i desne strane nejednadžbe). U ovom primjeru se osjenčavaju desne strane od pravaca restrikcija koje prikazuju nedopušteno područje.

određivanje dopuštenog područja				0	0			
R1	1	X1	+	1	X2	≤	100	
			0			≤	100	točno
R2	3	X1	+	4	X2	≤	200	
			0			≤	200	točno
R3	2	X1	+	3	X2	≤	250	
			0			≤	250	točno

Slika 12. Dopuštena područja (izvor: izrada autora)



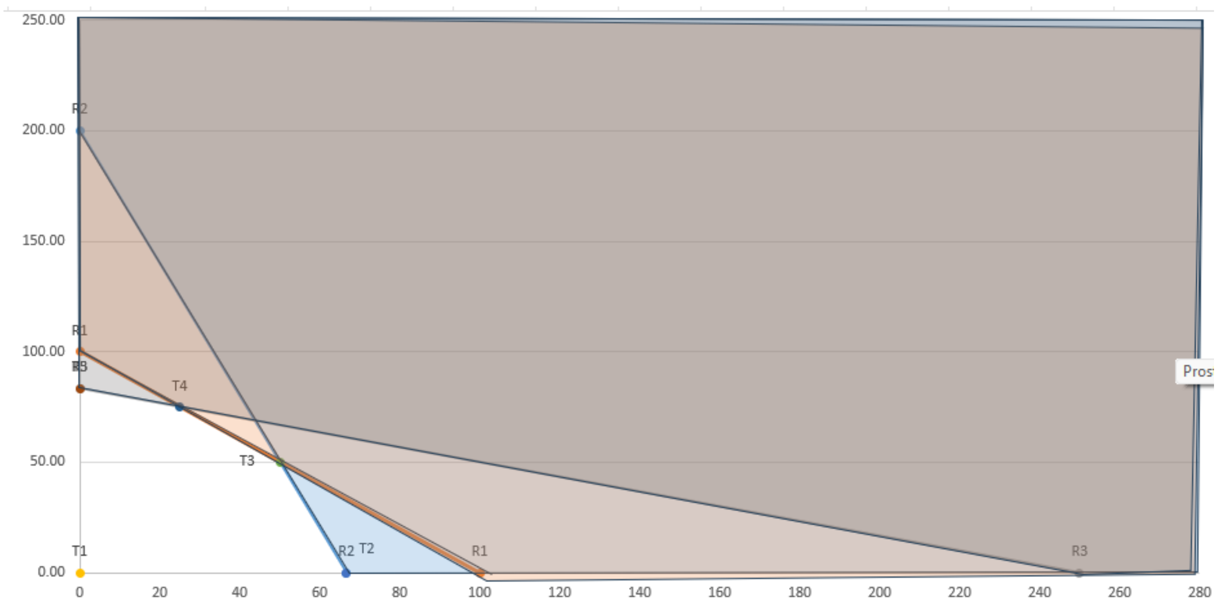
Slika 13. Dopušteno područje (izvor: izrada autora)

7.Pronalaženje točki rješenja

Nakon iščitavanja točke uvrštavaju se na graf. U slučaju da se točke ne mogu iščitati sa grafikona, a točke se dobiju računajući presjek pravaca na kojima točka leži uz pomoć formula MMULT i MINVERSE. U ovom zadatku se traže točke T3 i T4 uz pomoć presjeka.

Točke rješenja				
T1	0	0		
T2	66.67	0		
T3	50	50		
T4	25	75		
T5	0	83.33		
Presjeci				
t3	R1∩R2			
R1	1	1	≤	100
R2	3	1	≤	200
X1	50			
X2	50			
T4	R1∩R3			
R1	1	1	≤	100
R3	1	3	≤	250
x1	25			
x2	75			

Slika 14. Točke rješenja (izvor: izrada autora)



Slika 15. Uvrštavanje točki rješenja na grafikon (izvor: izrada autora)

8. Vrijednost funkcije cilja za moguće točke rješenja i optimalno rješenje

Točke koje se unose u grafički prikaz može se s funkcijom cilja. Nakon dobivenih rezultata iz tablice se traži uz pomoć formule MAX najveća vrijednost, a koristeći se funkcijama INDEKS i MATCH dobiva se optimalno rješenje. Kako bi poduzeće ostvarilo maksimalnu dobit ono bi trebalo proizvoditi 25 komada prijenosnih računala tipa O, a mora proizvoditi 75 prijenosnih računala tipa G. Prilikom proizvodnje optimalnih količina prijenosnih računala O i G poduzeće će ostvariti dobit od 117750 NJ.

Vrijednost funkcije cilja za moguće točke rješenja						
max	dobit	645	X1	+	1355	X2
T1	0	0	0			
T2	66.67	0	43002.15			
T3	50	50	100000			
T4	25	75	117750			
T5	0	83.33	112912.2			
Max	dobit		117750			

Slika 16. Točke rješenja od funkcije cilja (izvor: izrada autora)

9. Dodavanje funkcije cilja na graf

Prvi korak je da se prepiše funkcija cilja i izjednači se sa maksimalnom dobiti. Prvi korak je da se napravi tablica i u vanjske stupce upišu se nule. Prazna polja tj. unutrašnji dio u tablici se dobije tako što se u funkciji cilja desna strana podijeli sa traženim koeficijentom (npr. X_1 u unutarnjem dijelu tablice se dobije tako što se podijeli 117750 sa 645, a X_2 117750 podijeli se sa 1355)

Optimalno rješenje

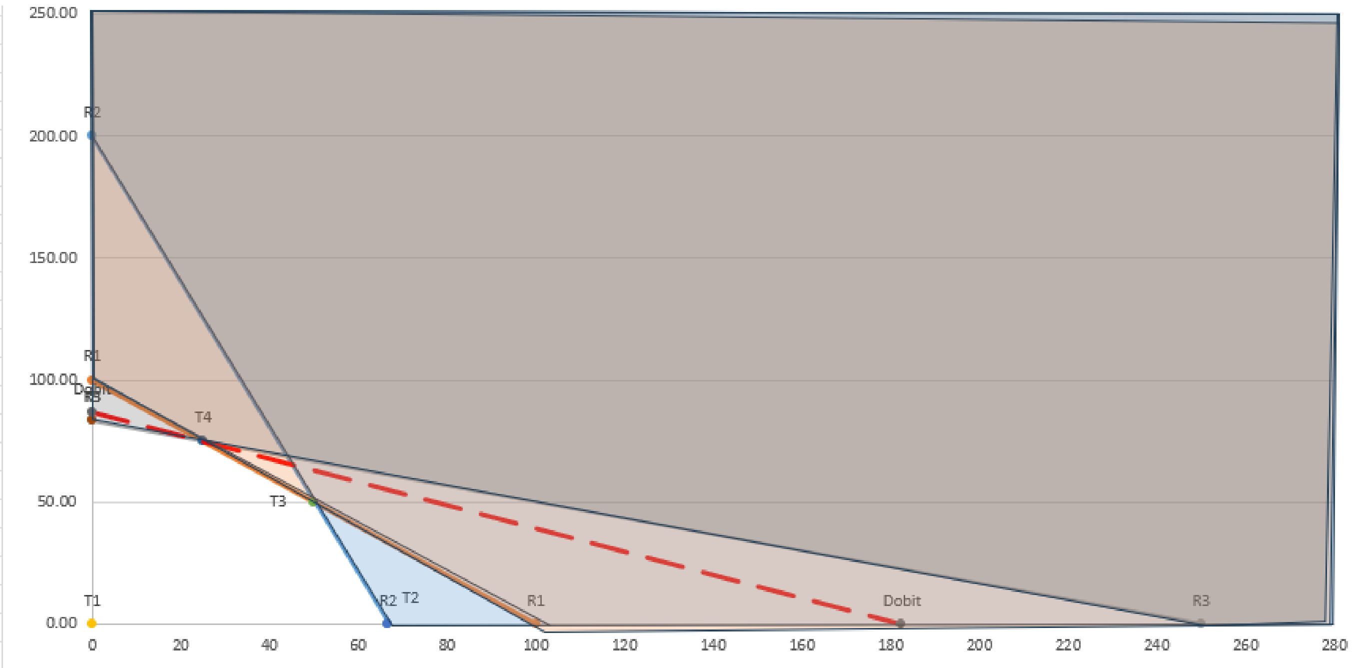
T4	25	75

Dodavanje funkcije cilja na graf

max	dobit	645	X1	+	1355	X2	=	117750

	X1	X2	X1	X2
Dobit	0	86.90	182.56	0

Slika 17. Kordinate funkcije cilja (izvor: izrada autora)



Slika 18. Dodavanje optimalnog rješenja na grafikon (izvor: izrada autora)

9. Provjera zadovoljenosti restrikcija

   U ovom koraku se npr. za prvu restrikciju točke optimalnog rješenja množe se sa nejednadžbama ograničenja i tako za ostala dva ograničenja. Nejednadžbe prvog i trećeg ograničenja su maksimalno iskorištene dok kod drugog ograničenja postoji neiskorištenost od 50 sati u pripremi.

Provjera zadovoljenosti restrikija									
T4	25	75							
R1	1	X1	+	1	X2	≤	100		
	100					≤	100	Kapaciteti maksimalno iskorišteni	
R2	3	X1	+	1	X2	≤	200		
	150					≤	200	neiskorištenost od 50 sati	
R3	1	X1	+	3	X2	≤	250		
	250					≤	250	Kapaciteti maksimalno iskorišteni	

Slika 19. Provjera zadovoljenosti restrikcija (izvor: izrada autora)

5. MODELI LINEARNOG PROGRAMIRANJA

U ovome poglavlju biti će objašnjeni neki modeli linearnog programiranja koji se često koriste u praksi i koji se upotrebljavaju u brojnim područjima. Razlika između modela i metode je ta što model predstavlja prikaz nekog problema (u ovom slučaju prikaz u matematičkom obliku) dok bi metoda bila postupak kako bi se riješio model i našlo optimalno rješenje tog modela.

5.1. Transportni model

Transportni model se prvi put spominje 1939. u radu L. V. Kantorovića na temu linearnog programiranja (Stanimirović, Stojković, Petković, 2007:6).

Transportni problem je specijalni slučaj linearnog programiranja i cilj ovog modela je da se roba preveze s jednog mjesta na drugo na najoptimalniji način (iz jednog skladišta u drugo).

Postoji nekoliko vrsti transportnog modela: (Brajdić, 2006:71)

1. Otvoreni transportni model(ponuda i potražnja nisu jednake)

   a) transportni model s viškom u ponudi ($\sum a_i > \sum b_j$)
   b) transportni model s viškom u potražnji ($\sum a_i < \sum b_j$)

2. zatvoreni transportni model ili problem Hitchcocka (ponuda je jednaka potražnji)

Neka u m centara ponude (ishodišta, I_i, $i=1,2,\dots,m$) imamo količine $a_1, a_2, \dots, a_m$ nekog homogenog proizovda, koje treba prevesti u n centara potražnje (odredišta, O_j, $j=1,2,\dots,n$), s poznatom količinom potražnje $b_1, b_2, \dots b_n$ tog proizvoda. Troškovi transporta c_{ij}, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2, \dots, n$ jedinice proizvoda iz svakog ishodišta i u svako odredište j, tako da ukupi troškovi transporta budu minimalni te da se iscrpi sva ponuda u ihodištima i zadovolji potražnja u odredištima. Uz pretpostavke da je ukupna ponuda jednaka ukupnoj potražnji tog proizvoda, problem se može formulirati na sljedeći način (Neralić, 2003:90):

Funkcija cilja:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Ograničenja:

a) ponude pogona predstavlja da za svako ishodišno mjesto I_i postoji zahtjev da se raspoloživa količina a_i dodijeli na određena mjesta gdje postoji potreba.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; 1,2,..,m$$

b) potražnja skladišta predstavlja sva odredišna mjesta O_j gdje postoji potreba za dobrom b_j

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\; j = 1,2,..,n$$

Uvjet nenegativnosti:

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1,2,\ \ldots,\ m,\ j= 1,2,\ \ldots,\ n$$

Slika 20. Matrični prikaz jediničnih transportnih troškova (izvor: Šimunović, Havrlišan, 2019:193)

Matrični prikaz jediničnih transportnih troškova					
C_{ij}	O_1	O_2	...	O_n	a_i
I_1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}	a_1
I_2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
I_m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_n	

Slika 21. Matrični prikaz transportiranih količina (izvor: Šimunović, Havrlišan, 2019:194)

Matrični prikaz transportiranih količina					
x_{ij}	S_1	S_2	...	S_n	a_i
P_1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1n}	a_1
P_2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
P_m	X_{m1}	X_{m2}	...	X_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_n	

Sljedeći primjer će biti riješen uz pomoć Excel solvera.

„Pretpostavimo da iz silos S1, S2 i S3 treba prevesti pšenicu u mlinove M1, M2,M3 i M4. neka količina pšenice u silosima 40,25 i 15 tisuća tona respektive, a potražnja pšenice u mlinovima 18,12,24 i 26 tisuća tona respektive. Troškovi transporta su sljedeći: c_{ij}, i=1,2,3, j=1,2,3,4 (u tisućama kuna po toni) od silosa do mlinova navedeni u tablici s ponudom a_i, i=1,2,3 u ishodištima i potražnjom b_j, j=1,2,3,4 u odredištima.

Slika 22. Postavljanje zadatka (izvor: izrada autora)

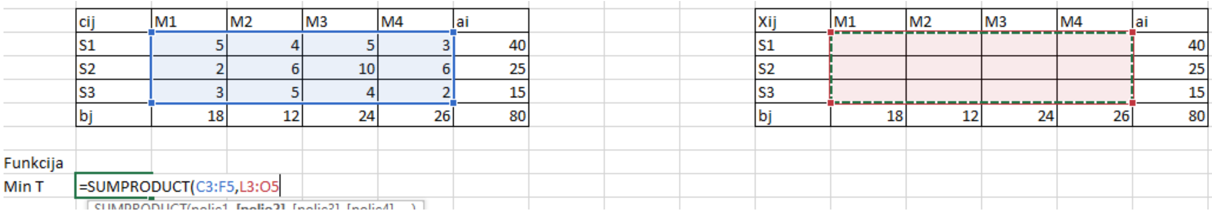
cij	M1	M2	M3	M4	ai
S1	5	4	5	3	40
S2	2	6	10	6	25
S3	3	5	4	2	15
bj	18	12	24	26	

Funkcija cilja:

Funkcija cilja dobije se zbrojem umnožaka jedinične cijene transporta između ishodišta i odredišta te odgovarajuće količine proizvoda

min T= $5x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 3x_{14} + 2x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23} + 6x_{24} + 3x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34}$

Slika 23. Funkcija cilja (izvor: izrada autora)



cij	M1	M2	M3	M4	ai
S1	5	4	5	3	40
S2	2	6	10	6	25
S3	3	5	4	2	15
bj	18	12	24	26	80

Xij	M1	M2	M3	M4	ai
S1					40
S2					25
S3					15
bj	18	12	24	26	80

Ograničenja:

$x_{11} + x_{12} + 5x_{13} + x_{14} = 40$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 25$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 15$

$x_{11}+x_{21}+x_{31} = 18$

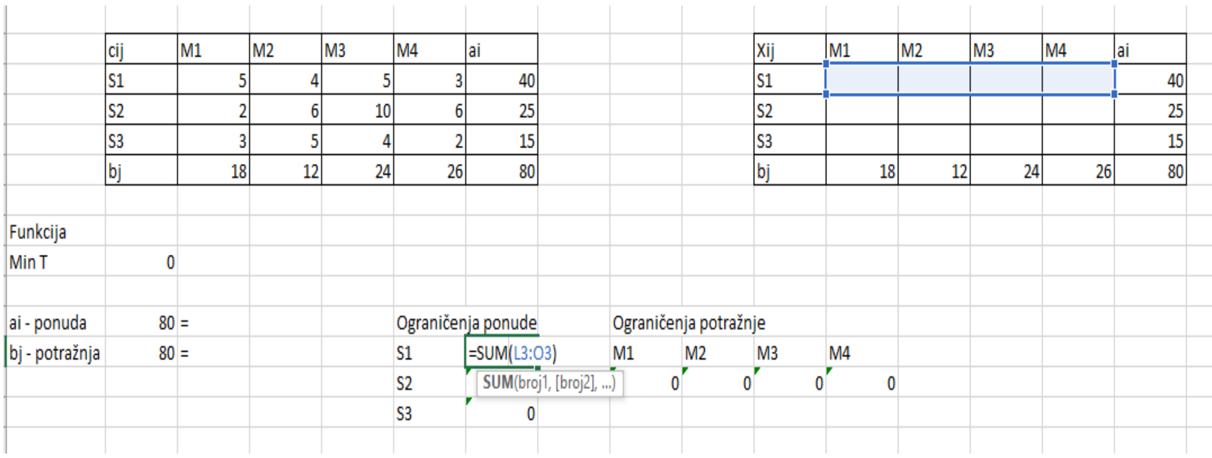
$x_{12} + x_{22}+ x_{32}= 12$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 24$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} =26$

$x_{11},x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{34} \geq 0$

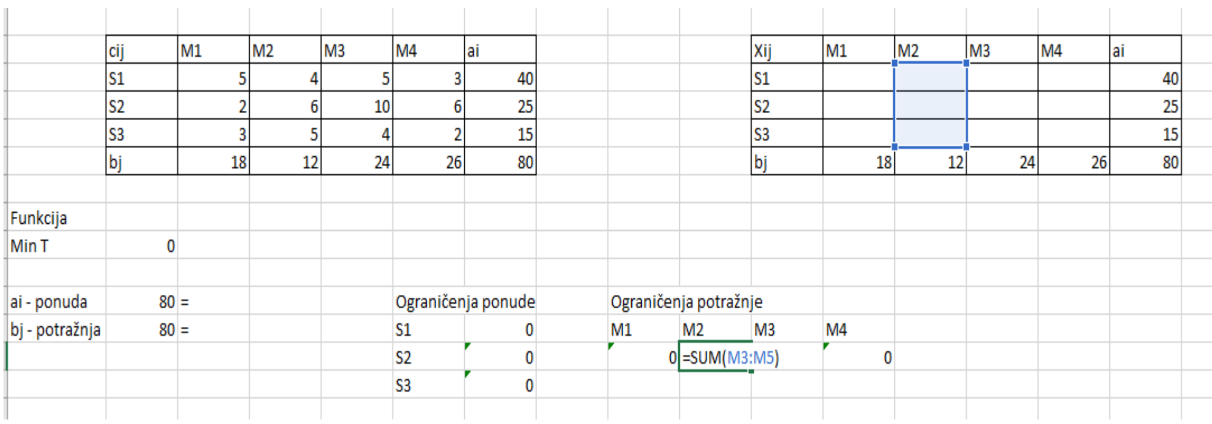
Slika 24. Ograničenje ponude (izvor: izrada autora)



cij	M1	M2	M3	M4	ai
S1	5	4	5	3	40
S2	2	6	10	6	25
S3	3	5	4	2	15
bj	18	12	24	26	80

Xij	M1	M2	M3	M4	ai
S1					40
S2					25
S3					15
bj	18	12	24	26	80

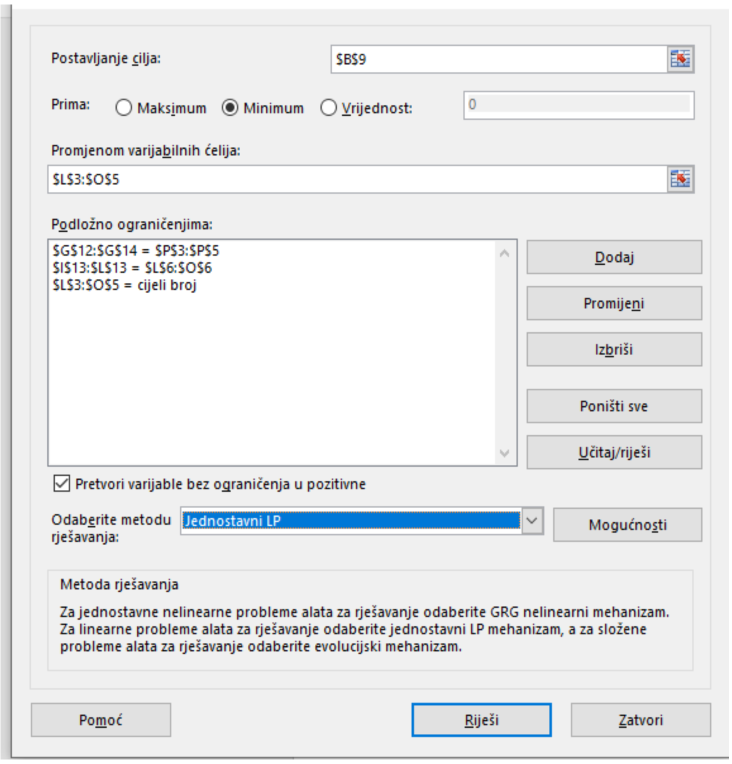
Slika 25. Ograničenje potražnje (izvor: izrada autora)



cij	M1	M2	M3	M4	ai
S1	5	4	5	3	40
S2	2	6	10	6	25
S3	3	5	4	2	15
bj	18	12	24	26	80

Xij	M1	M2	M3	M4	ai
S1					40
S2					25
S3					15
bj	18	12	24	26	80

Slika 26. Prikaz zadataka u rješavatelju (izvor: izrada autora)



Konačno rješenje zadatka:

Slika 27. Rješenje zadatka (izvor: izrada autora)

cij	M1	M2	M3	M4	ai
S1	5	4	5	3	40
S2	2	6	10	6	25
S3	3	5	4	2	15
bj	18	12	24	26	80

Xij	M1	M2	M3	M4	ai
S1	0	5	24	11	40
S2	18	7	0	0	25
S3	0	0	0	15	15
bj	18	12	24	26	80

Funkcija		
Min T	281	
ai - ponuda silosa	80	=
bj - potražnja mlina	80	=

Ograničenja ponude	
S1	40
S2	25
S3	15

Ograničenja potražnje			
M1	M2	M3	M4
18	12	24	26

Uvjet nenegativnosti

Xij≥0

i=1,2,...,m

j=1,2,...,n

Na temelju količina pšenice u ovoj tablici x_{12}=5, x_{13}=24, x_{14}=11, x_{21}=18, x_{22}=7, x_{34}=15 koje treba transportirati i navedenih troškova transporta c_{12}=4, c_{13}=5, c_{14}= 5, c_{21}=2, c22=6 i c_{34}=2, dobiju se minimalni ukupni troškovi transport u iznosu od 4·5+5·24+3·11+2·18+6·7+2·15= 281 tisuća kuna. Iz tablice se može vidjeti da je ponuda iskorištena u svim ishodištima i da je potražnja zadovoljena u svim odredištima (Neralić, 2003:158).

5.2. Model asignacije

Asignacija ili problem pridruživanja djelatnika je specijalni slučaj transportnog modela gdje se traži optimalni način raspodjele n poslova (zadataka, predmeta) na n mjesta (ljudi, strojeva) s time da je jedan posao dodijeljen samo jednom čovjeku. Razlika između transportnog problema i modela asignacije je ta što su vrijednosti koje se nude i one koje se traže jednake jedan. (Barković, 2001:149). Još jedna od pretpostavki je da svi djelatnici ne rade jednako efikasno, što znači da mora biti poznata efikasnost c_{ij} u obavljanju j – tog posla i – tog djelatnika (Brajdić, 2006:90).

Problem asignacije može se primijeniti u različitim situacijama, kao što su dodjeljivanje zadataka radnicima, raspodjela prodajnih područja predstavnicima, dobjeljivanje rukopisa urednicima ili određivanje strojeva za obavljanje pojedinih poslova. (Plazibat, Reić, 2015:200

Ako je poznata efikasnost radnika, cilj je maksimizirati ukupnu efikasnost, a ako je zadano vrijeme koje radnik utroši na pojedini posao onda je funkcija cilja ukupno utrošeno vrijeme i treba je minimizirati.

$$\text{Min/Max } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Kada je broj subjekata i jednak broju objekata j ($m=n$),tada se radi o zatvorenom problemu asignacije. Obrnuta je situacija kod otvorenog problema asignacije međutim kada je više subjekata od broja objekata ($m > n$), treba dodati potreban broj fiktivnih objekata ($n_f = m - n$), a ako ima više objekata, a manje subjekata ($n > m$), tada je potrebno dodati potreban broj fiktivnih subjekata ($m_f = n - m$) (Plazibat, Reić, 2015:200).

Ograničenja kod problema asignacije slijede iz definicije samog problema:

a) jedna osoba se raspoređuje na jedan posao

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1,2, \dots, n$$

b) jedan posao se raspoređuje jednom radniku

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1,2, \dots, n$$

Uvjet binarnosti:

X_{ij}=1, ako je i – ti posao/radnik dodijeljen/asigniran j – tom radnom mjestu

X_{ij}=0, ako je i – ti posao/radnik nije dodijeljen/asigniran j – tom radnom mjestu

U nastavku će biti obrađen primjer zadatka sa prodajnim predstavnicima koji će biti dodijeljeni prodajnim područjima. Tvrtka XY ima četiri prodajna predstavnik (P1, P2, P3, P4) i četiri prodajna područja (A, B, C, D). Svaki prodajni predstavnik će biti dodijeljen jednom prodajnom području, a cilj je minimizirati troškove putovanja i boravka. Troškovi su različiti za svakog predstavnika ovisno o području na koje je dodijeljen.

Slika 28. Troškovi u eurima za svakog predstavnika po području

	Vrijeme za prilagodbu u h			
	A	B	C	D
P1	50	35	25	20
P2	70	50	65	70
P3	30	80	75	40
P4	40	45	10	80

Slika 29. Postavljanje zadatka (izvor: izrada autora)

Cij	A	B	C	D	ai
P1	50	35	25	20	1
P2	70	50	65	70	1
P3	30	80	75	40	1
P4	40	45	10	80	1
bj	1	1	1	1	

Xij	A	B	C	D	ai
P1					1
P2					1
P3					1
P4					1
bj	1	1	1	1	

ai	4	=
bj	4	=
Funkcija cilja		
Min Z	0	

ograničenja za prodajne predstavnike	
P1	0
P2	0
P3	0
P4	0

ograničenja za područja			
A	B	C	D
0	0	0	0

Funkcija cilja:

$$\text{Min } Z = 50X_{11}+35X_{12}+25X_{13}+20X_{14}+70X_{21}+50X_{22}+65X_{23}+70X_{24}+30X_{31}+ 80X_{32}+75X_{33}+40X_{34}+40X_{41}+45X_{42}+10X_{43}+80X_{44}$$

Ograničenja:

broj strojeva kojima može biti dodijeljen posao

P1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$

P2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$

P3: $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$

P4: $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$

Broj poslova koji se mogu dodijeliti strojevima

S1: $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$

S2: $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$

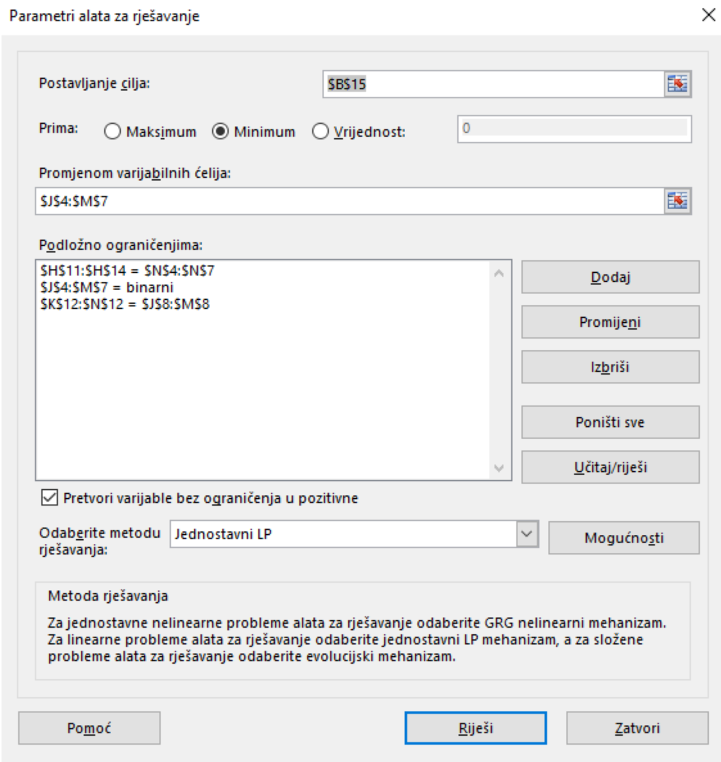
S3: $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$

S4: $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$

Varijable odlučivanja Xij su pozitivni brojevi tj. binarni (0 ili 1)

Slika prikazuje izgled alata za rješavanje u koju se unose podatci funkcije cilja, varijable odlučivanja i sva ograničenja. Kod podataka u ograničenima je naglašeno da je raspon ćelija u kojima se varijable odlučivanja binarni brojevi.

Slika 30. Podaci uneseni u solver (izvor: izrada autora)



Slika 31. Rješenje zadatka (izvor: izrada autora)

Cij	A	B	C	D	ai
P1	50	35	25	20	1
P2	70	50	65	70	1
P3	30	80	75	40	1
P4	40	45	10	80	1
bj	1	1	1	1	

Xij	A	B	C	D	ai
P1	0	0	0	1	1
P2	0	1	0	0	1
P3	1	0	0	0	1
P4	0	0	1	0	1
bj	1	1	1	1	

ai	4	=
bj	4	=

ograničenja za prodajne predstavnike	
P1	1
P2	1
P3	1
P4	1

ograničenja za područja			
A	B	C	D
1	1	1	1

Funkcija cilja	
Min Z	110

Optimalna podjela:

- P1 se dodjeljuje Području D, što košta 20 eura
- P2 se dodjeljuje Području B, što košta 50 eura
- P3 se dodjeljuje Području A, što košta 30 eura
- P4 se dodjeljuje Području C, što košta 10 eura

Ovo rješenje pokazuje da je optimalna dodjela prodajnih predstavnika onim područjima koja minimizira ukupne troškove. Ukupni trošak iznosi 110 dolara što je najmanji mogući trošak s kojim će tvrtka XY moći postići s ovom kombinacijom dodjela.

5.3. Model prehrane

Povijesno gledano, problem prehrane je jedan od prvih linearnih problema, a sastoji se od sljedećeg a cilj je izrada modela ili programa prehrane neke osobe ili skupine ljudi (vojske) tako da se izborom hrane osigura dovoljna nutritivnih vrijednosti, odnosno dovoljna količina proteina, kalorija, vitamina, masnoća itd., a da troškovi za hranu budu minimalni (Neralić, 1966:89).

Cilj problema prehrane je odabrati broj porcija namirnica koje se treba kupiti i konzumirati uzimajući u obzir cijenu po porciji od svakog obroka i nutritivnim informacijama (vrijednostima) svake namirnice. Nutritivne potrebe za svaki prehrambeni sastojak obično su izražene kao minimalna i maksimalna dopuštena količina. Dodatna ograničenja, poput minimalnog ili maksimalnog broja porcija, mogu se primijeniti s ciljem poboljšanja kvalitete jelovnika (Zheng, 2022:125).

U nastavku će biti riješen primjer zadatka uz pomoć simpleks metode. Mario si pravi plah prehrane tako da unese dovoljne količine proteina, masti i ugljikodirata, ali i želi minimizirati troškove pri kupovini namirnica koje koristi za spremanje svojih obroka. Mario ima 70 kilograma i mora dnevno unijeti 2 grama proteina po kilogramu tjelesne mase, 0,7 grama masti po kilogramu tjelesne mase i 250 grama ugljikohidrata. Imati će dva obroka i po obroku mora unijeti 70 grama proteina, 24,5 grama masti i 125 grama ugljikohidrata.

Tablica 1. Popis namirnica

Proizvod	Protini (g/kg)	Masti (g/kg)	Ugljikohidrati (g/kg)	Cijena (EUR/kg)
Pileća prsa	225	26	0	8
Riža	66	6	793	2
Zrnati sir	110	18	30	5,2
Kruh	97	12	510	2,3
Jaja M	64	46	0	4

Slika 32. Rješenje zadatka za 1. obrok (izrada autora)

1. obrok				Restrikcije						
X1	kruh			R1	Proteini					
X2	jaja			R2	masti					
X3	sir			R3	ugljikohidrati					
Funkcija cilja										
Min z	2.3	x1	+	4	x2	+	5.2	x3		
Restrikcije										
R1	97	X1	+	64	X2	+	110	X3	≥	70
R2	12	X1	+	46	X2	+	18	X3	≥	24.5
R3	510	X1	+	0	X2	+	30	X3	≥	125
varijable										
X1	0.45									
X2	0.42									
X3	0.00									
Funkcija cilja										
Min z	2.69									
Restrikcije										
R1	70.00	≥	70							
R2	24.50	≥	24.5							
R3	228.08	≥	125							

Slika 33. Rješenje zadatka za 2. obrok

2. obrok				Restrikcije			
X1	pileća prsa			R1	Proteini		
X2	riža			R2	masti		
				R3	ugljikohidrati		
Funkcija cilja							
Min z	8	x1	+	2	x2		
Restrikcije							
R1	225	X1	+	66	X2	≥	70
R2	26	X1	+	6	X2	≥	24.5
R3	0	X1	+	793	X2	≥	125
varijable							
X1	0.91						
X2	0.16						
Funkcija cilja							
Min z	7.56						
Restrikcije							
R1	214.24	≥	70				
R2	24.50	≥	24.5				
R3	125.00	≥	125				

Za 1. obrok Mario, kako bi optimizirao trošak trebao bi pojesti 450 grama kruha i 420 grama jaja (otprilike 7 jaja ako uzmemo u obzir da je jedno jaje između 53 i 63 grama), a kako bi se minimizirao trošak, Mario bi trebao izbaciti zrnati sir iz prehrane. Unosom ovih namjernica unijeti će se točna količina masti i proteina ali će biti značajnog viška unosa ugljikohidrata od 103,08 grama. Za 2. obrok, kako bi optimizirao trošak trebao bi pojesti 910 grama piletina i 160 grama riže. Unosom ove količine namirnice Mario će unijeti točnu količinu

masti i ugljikohidrata, ali će imati značajan višak proteina od 144,24 grama. Restrikcije koje su postavljene vezane za unos proteina, masti i ugljikohidrata značajno su oblikovale optimalno riješenje. Uz pomoć simpleks metode osigurano je da se ove nutritivne potrebe zadovolje uz minimalni trošak, koristeći optimalne kombinacije dostupnih namirnica. Mario će dnevno potrošiti za ova dva obroka 10,25 eura za hranu.

6. PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA U EKONOMIJI

U ekonomiji, linearno programiranje ima široku primjenu u različitim područjima kao što su proizvodnja, financije, bankarstvo, marketing i upravljanje resursima. Linearno programiranje omogućava maksimiziranje dobiti, minimiziranje troškova i upravljanje resursima na efikasan način poštujući postavljena ograničenja. U nastavku će se razmotriti primjena linearnog programiranje u ekonomiji, uključujući bankarskog sektora, marketing i optimizacija portfelja.

6.1. Primjena u bankarskom sustavu

Viši menadžment banaka se suočavaju s pitanjem vrednovanja strukture bilance banke. Prinosi se uvrštavaju u kategoriju imovine, a troškovi u kategoriju obveze, te se dobitak banke može predstaviti u terminima njezine bilance. Dobar način upravljanje kreditnim portfeljom banke je veoma važno kako bi banka mogla biti konkurentnija u konkurentnom kreditnom okruženju. Glavni čimbenik koji jedan od glavnih uzroka propasti banaka koji ometa optimizaciju cilja banke su loši krediti. Glavni cilj banke je da se maksimizira povrat dioničarima putem maksimalizacije dobiti koja se može provesti u operativni cilj postizanja nekog ciljanog stanja bilance na kraju razdoblja koje proizvodi najveće prihode (Agarana M. C, Bishop S. A i Odetunmibi O. A, 2014:52).

U nastavku ovog poglavlja biti će opisan primjer kako je CCB uz pomoć linearnog programiranja izradila model za svoje poslovanje kako bi maksimalizirala kamatne razlike između izvora i upotrebe sredstava.

Menadžment Central Carolina Bank and Trust Company (CCB) zbog zabrinutosti oko maksimalizacije kamatne razlike između izvora i upotrebe sredstava osniva 1975. odbor za financijsko planiranje koji je bio sastavljen od viših bankovnih službenika. Djelovanje tog odbora na prilagodbi sljedećim funkcijama obrađeni su na temelju rada S. D. Balbirera i D. Shawa (Balbirer, Shaw, 1981., 77-83):

1. predviđanje kamatnih stopa
2. predviđanje potražnje za bankarskim uslugama
3. politika upravljanja likvidnosti
4. raspodjela sredstava

Izvršni odbor je razvio, prema navedenom radu, model optimizacije bilance korištenjem linearnog programiranja. (Isto, 77-83)

Faza razvoja modela je uključivala sastanke odbora na kojem su se rasprave vodile oko složenosti modela, a to se odnosilo na duljinu planiranja, broj točaka donošenja odluka unutar horizonta planiranja i broj kategorija bilance. Nakon što su raspravili o dostupnim opcijama odlučili su se za jednoslojni model s razdobljem od jedne godine koji je sadržavao 46 kategorija imovine i 32 kategorije obveza i kapitala. Nakon što je model oblikovan, identificirani su i potrebni podaci. Podaci potrebni za implementaciju modela su bili:

1. Očekivani prinosi na sve vrijednosne papire i kategorije kredita
2. Očekivane kamatne stope na depozite i obveze na tržištu novca
3. Administrativni i/ili troškovi obrade po glavnim kategorijama kredita i depozita
4. Očekivani gubici od kredita, po vrsti kredita, kao postotak nepodmirenih kredita
5. Struktura dospijeća svih kategorija imovine i obveza
6. Prognoze potražnje za bankarskim uslugama

Cilj modela je maksimalizacija dobiti tijekom jednogodišnjeg horizonta.

Varijable odlučivanja su podijeljene na varijable vezane za odluke koje predstavljaju imovinu i one koje predstavljaju obveze/kapital

Tablica 2. Varijable odluka koje se predstavljaju imovinu (izvor: Balbirer, Shaw, 1981:79)

Oznaka varijable	**Kategorija imovine**
X1	Gotovina
X_{2j}(j=1,2,...,m_2)	Vrijednosni papiri Ministarstva financija
X_{3j}(j=1,2,...,m_3)	Agencijski vrijednosni papiri
X_{4j}(j=1,2,...,m_4)	Vrijednosni papiri oslobođeni poreza
X_{5j}(j=1,2,...,m_5)	Ostali kratkoročni instrumenti
X_{6j}(j=1,2,...,m_6)	Potrošački krediti
X_{7j}(j=1,2,...,m_7)	Poslovni krediti
X_{8j}(j=1,2,...,m_8)	Krediti na nekretnine
X_{9j}(j=1,2,...,m_9)	Ostala imovina
X10	Prodani federalni fondovi

Tablica 3. Varijable odluka koje se predstavljaju obveze (izvor: Balbirer, Shaw, 1981:79)

Oznaka varijable	**Kategorija obveza/kapitala**
Y_{1k}(k=1,2,...,n1)	Računi potražnje
Y_{2k}(k=1,2,...,n2)	Štedni računi
Y_{3k}(k=1,2,...,n3)	Štedni certifikati
Y_{4k}(k=1,2,...,n4)	Potvrde o tržištu novca
Y_{5k}(k=1,2,...,n5)	Državne obveznice
Y_{6k}(k=1,2,...,n6)	Potvrde o depozitu
Y_{7k}	Ugovori o reotkupu
Y_{8k}	Kupljeni federalni fondovi
Y_{9k}(k=1,2,...,n9)	Ostale obveze
Y_{10k}(k=1,2,...,n10)	Kapitalne bilješke
Y_{11k}(k=1,2,...,n11)	Kapitalni računi

Funkcija cilja izražena je kao maksimalizacija profita, a formulirana je na sljedeći način:

$$Max\ Z = \sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij} - \sum_k \sum_l c_{ik}\, y_{ik}$$

Koeficijent funkcije cilja opisuju privlačnost svake kategorije imovine i obveza, korišteni su neto prinosi i troškovi. Neto prinos na imovinu se dobije razlikom administrativnih troškova i očekivanih gubitaka od kredita po dolaru od očekivanog nominalnog prinosa.

Model sadrži pet kategorija ograničenja:

1. Ograničenja maksimalne razine aktivnosti
2. Ograničenja prometa
3. Politička ograničenja
4. Pravna ograničenja
5. Ograničenja protoka sredstava

U CCB-u, odgovornost promijene parametara modela je na višem rukovodstvu zaduženom za upravljanje sredstvima, kao što je navedeno u već citiranom radu. Upravitelj sredstava prije sastanka odbora za financijsko planiranje traži prognoze od viših bankovnih službenika o promjenama u projekcijama potražnje za bankarskim uslugama. Te promjene kao i buduće prognoze kamatnih stupa su važni podaci za model. Promjene parametara modela prosljeđuju se odjelu koji obrađuje podatke, gdje analitičar unosi revidirane podatke u program koji daje revidirani rezultat. U slučaju da su predviđene unosi poput kamatnih stopa i potražnje depozita podložni visokoj nesigurnosti, generira se više ponavljanja. Izlaz modela sastoji se od neto prinosa ili troškova i ciljeva za svaku kategoriju (poziciju) bilance, kao i odgovarajućih minimuma koji predstavlja donje granice ograničenja prometa ili maksimuma koji predstavlja gornje granice ograničenja. (Isto, 77-83)

Model na temelju dualnog rješenja rangira bankovne usluge. Ako je određena imovina ili obveza poželjna model će je dovesti do razine blizu gornje granice postavljene ograničenjem razine aktivnosti. Preporuke iz modela dobivene na sastancima odbora za financijsko planiranje preispituju se i prilagođavaju trenutnim uvjetima i potrebama banke.

6.2. Primjena linearnog programiranja u marketingu

Prema istraživanju Fuqua School of Business na Duke Universityju, Deloitte LLP i American Marketing Association 11% ukupnih troškova tvrtki čine marketinški troškovi. (Melody Yang, 2024.).

Modeli linearnog programiranja u marketingu mogu pomoći pri donošenju odluka za kombinaciju oglašivačkih kanala. To može biti na dva načina. Prvi način jest da troškovi oglašavanja budu minimizirani, dok drugi načinom nastoji se maksimizirati pokrivenost nad potencijalnim kupcima s ciljem minimiziranja troškova oglašavanja ili da se maksimizira pokrivenost nad potencijalnim kupcima tj. do kojih će doprijeti propagandna poruka putem različitih kanala uz ograničenja proračuna, specifične stope izloženosti različitim tržišnim segmentima te propisan minimalni i maksimalni broj oglasa u različitim medijima. Osim rješavanja problema vezano za oglašavanje, marketing koristi linearno programiranje i u problemima marketinškog istraživanja tržišta tj. istraživanje potrošača. (Babić, 2017:196)

Gospodarske komore, oglašivačke agencije ili istraživačke tvrtke imaju mogućnost pokretanja i financiranja istraživačkih projekata s ciljem ažuriranja i unaprijeđena postojećih podataka te stvaranje dodatnih informacija u tom smislu. (Karagiannis, Stefanos & Tsoukatos, Evangelos & Papailias, Theodoros, 2003:5).

U nastavku će biti prikazan zadatak iz knjige Modeli i metode poslovnog odlučivanja autora Babića (2017:196), „Kockarnica - Win Big Gambling Club odlučila je promovirati kockarsku zabavn putem lokalnih i regionalnih medija. Menadžeri kluba odlučili su za promocija trošiti 8000 $ tjedno i to kroz četiri promotivna medija: TV spotovi, novinski oglasi i dvije vrste radijskih oglasa. Cilj kluba (kockarnice) je raznim vrstama oglasa doprijeti do što je više moguće potencijalnih korisnika njihovih usluga. Sljedeća tablica pokazuje broj potencijalnih korisnika usluga kockarnice do kojih dospijeva reklamni oglas korištenjem pojedine vrste medija. U tablici su također i troškovi po objavljenom oglasu ili reklami (spotu) i maksimalan broj oglasa koji se mog naručiti u jednom tjednu“ (Babić, 2017:196).

Tablica 4. Podaci iz zadatka

Vrsta medija	Broj ljudi do kojji dopire oglas	trošak po olasu	Maksimalna broj oglasa po tjednu
Tv spot (1 min)	5000	800	12
Dnevne novine (oglas - cijela stranice)	8500	925	5
Radio spot (1/2 minute udarno vrijeme)	2400	290	25
Radio spot (1 min, poslijepodne)	2800	380	20

„Ugovorni aranžman kladionice zahtijevaju da se barem 5 radio spotova objavi svaki tjedan. Da bi osigurali široku promocijsku kampanju menadžment inzistira da se ne potroši više od 1800$ na radio oglašavanje svaki tjedan“ (Babić, 2017:196)..

Varijable:

X_1 – broj jednominutnih TV spotova koji idu svaki tjedan
X_2 – broj oglasa od pune stranice koji idu u dnevne novine svaki tjedan
X_3 – broj radio spotova tjedno od ½ minute u udarnom vremenu
X_4 – broj radio spotova tjedno od 1 minute u popodnevnom terminu

Funkcija cilja:

Max $Z= 5000x_1 + 8500x_2 + 2400x_3 + 2800x_4$
Ograničenja:

$X_1 \leq 12$ (maksimalan broj TV spotova tjedno),
$X_2 \leq 5$ (maksimalan broj novinskih oglasa tjedno),
$X_3 \leq 25$ (maksimalan broj radio spotova od 1/2 min. tjedno),
$X_4 \leq 20$ (maksimalan broj radio spotova od I min. tjedno),
$800\ X_1 + 925\ X_2 + 290\ X_3 + 380\ X_4 \leq 8000$ (tjedni raspoloživi budžet za oglašavanje),
$X_3 + X_4 \geq 5$ (minimalan broj ugovorenih radio spotova),
$290\ X_3 + 380\ X_4 \leq 1800$ (maksimalni budžet koji se smije potrošiti na radio spotove).
Rješenje zadatka

Slika 34. Rješenje zadatka (izvor: izrada autora)

FJA. CILJA													
Max Z	5000	x1	+	8500	x2	+	2400	x3	+	2800	x4		
Restrikcije													
R1	1	X1	≤	12									
R2	1	X2	≤	5									
R3	1	X3	≤	25									
R4	1	X4	≤	20									
R5	800	X1	+	925	X2	+	290	X3	+	380	X4	≤	8000
R6	1	X3	+	1	X4	≥	5						
R7	290	X3	+	380	X4	≤	1800						
VARIJABLE													
X1	1.97												
X2	5.00												
X3	6.21												
X4	0.00												
FJA CILJA													
MAX Z	67240.30												
Ograničenja													
R1	1.97	≤	12										
R2	5.00	≤	5										
R3	6.21	≤	25										
R4	0.00	≤	20										
R5	8000.00	≤	8000										
R6	6.21	≥	5										
R7	1800.00	≤	1800										

Rješenje problema:

X_1 – 1.97 (2) tv spotova

X_2 – 5 novinskih oglasa

X_3 – 6.21 (6) radio spotova od 1/2 min

X_4 – 0 spotova od 1 minutu

uz maksimalan broj pokrivenosti od (ljudi koji će primijeniti dati oglas) 67240.30 (67240).

6.3. Optimiziranje odabira portfelja

Portfelj je individualna ili korporativna investicija kojom mogu upravljati financijske institucije ili financijski stručnjaci i uključuje financijska sredstva, vlasničke i dužničke vrijednosne papire i novac koji posjeduje investitor (Oladejo, N. K., Abolarinwa, A., & Salawu, S. O. (2020:1).

Optimizacija portfelja je traženje dugoročnog portfelja koji će donositi ulagaču donositi prinose (maksimalizacija prinosa) uz što manji rizik od gubitaka (minimiziranje rizika). Ove karakteristike portfelja karakteriziraju efikasni portfelj. Efikasni portfelj se postavlja pod pretpostavkama o načinu ponašanja ulagača pri donošenju investicijskih odluka. Ulagači su karakteristični po tome što ne vole rizik i uvijek će izabrati onu investicijsku odluku koja je manje rizičnija. Portfelj koji ulagač odabere između mnogo opcija efikasnih portfelja zove se optimalni portfelj. Tokom formiranja portfelja, ulagači moraju primijetiti kako alocirati kapitalne resurse i primjenjive odredbe o investiraju. Cilj formiranja portfelja je da se dođe do optimalnog portfelja. (Sukono, Hidayat, i drugi, 2018:2) .

Primjer: Pretpostavimo da investitor želi diverzificirati svoj portfelj i uzeti u obzir dugoročne potencijale, ali istovremeno želi maksimizirati svoj trenutni prihod od dividendi. Razmotrio je razne vrijednosne papire u koje bi mogao uložiti i klasificirao ih u četiri tipa:

Tip A**:** Relativno visok element rizika, s proporcionalno visokim dividendama i smatra se da ima potencijal za rast.

Tip B**:** Spekulativne dionice s velikim rizikom, visokim dividendama, ali manjim potencijalom rasta u usporedbi s tipom A.

Tip C**:** Dionice s malim rizikom, značajnim potencijalom rasta, ali relativno niskim trenutnim prihodom od dividendi.

Tip D**:** Dionice s malim rizikom, neznatnim potencijalom rasta i prilično visokim dividendama.

Zbog elementa rizika, investitor želi ograničiti kupnju tipa A i B na najviše 30% svoje investicije. Kako bi poboljšao izglede za dugoročni rast svoje investicije, želi imati najmanje 40% svog ukupnog ulaganja u tipovima A i C. Unutar tih ograničenja, želi maksimizirati svoj trenutni prihod od dividendi. Ukupna investicija iznosi 1,000,000 NJ. Povrati dividendi na četiri tipa ulaganja su: A: 6%, B: 7%, C: 3%, D: 5% (Ajayi, Rabiu, 2021:4).

1. x_1 ulaganja s visokim rizikom.
2. x_2 ulaganje u špekulativne dionice

3. $x_3$ulaganje s malim rizikom i s velik porastom.
4. x_4 ulaganje u dionice s malim rizikom i s malim rastom

Funkcija cilja:

Max Z = 0.06x1 + 0.07x2 + 0.03x3 + 0.05x4

Restrikcije:

x1 + x2 + x3 + x4 ≤ 1000000

x1 + x2 ≤ 300000

x1 + x2 + x3 ≥ 400000

Uvjet nenegativnosti:

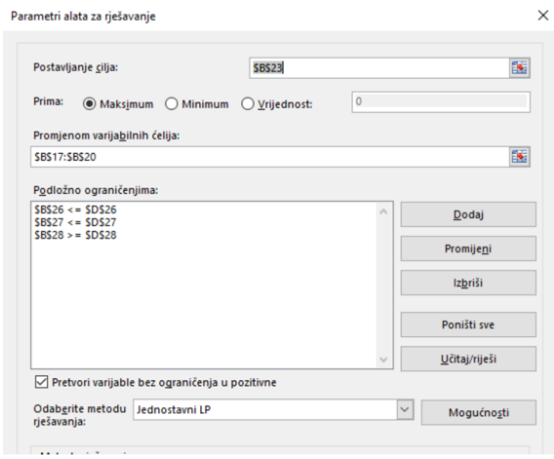
x1 + x2 + x3 + x4 ≥0

Zadatak je riješen uz pomoć *solvera*.

Slika 35. Rješenje zadatka (izvor: izrada autora)

Fja cilja													
Max Z	0.06	x1	+	0.07	x2	+	0.03	x3	+	0.05	x4		
Restrikcije													
R1	1	x1	+	1	x2	+	1	x3	+	1	x4	≤	1000000
R2	1	x1	+	1	x2	≤	300000						
R3	1	x1	+	1	x2	+	1	x3	≥	400000			
Uvjet nenegativnosti													
x1	+	x2	+	x3	+	x4	≥	0					
Varijable													
x1	0												
x2	300000												
x3	100000												
x4	600000												
fja cilja													
Max Z	54000												
Restrikcije													
R1	1000000	≤	1000000										
R2	300000	≤	300000										
R3	400000	≥	400000										

Slika 36. Podaci uneseni u solver (izvor: izrada autora)



Na temelju dobivenog rješenja investitor ne treba ulagati u x1, u x2 treba uložiti 300000 NJ, u x3 uložiti 100000 NJ i u x4 600000 NJ. Prema funkciji cilja maksimalni prihod od dividendi iznositi će 54000 NJ.

7. RASPRAVA

Primjena modela linearnog programiranja i njegovo uvođenje u ekonomiju i poslovno odlučivanje prikazuje njegovu važnost prilikom raspodjele resursa i donošenja poslovnih odluka u raznim područjima (bankarstvo, industrija, marketing, transport). Osim toga stvara jasnu sliku za razumijevanje modela optimizacije koje se koriste u raznim industrijama. Uz pomoć simpleks metode i grafičke metode, moguće je analizirati ekonomske probleme i pronaći optimalna rješenja na efikasan način. Razvoj simpleks metode omogućio je rješavanje složenijih problema s velikim brojem varijabli, čime su se otvorile nove mogućnosti za primjenu u složenim poslovnim situacijama. Danas postoji puno optimizacijskih alata koji koriste simpleks algoritam za rješavanje problema linearnog programiranja (Microsoft Excel, MATALAB, Gurobi, IBM ILOG CPLEX, GLPK) koji znatno olakšavaju rješavanje složenih poslovnih problema. Grafička metoda omogućava vizualno predstavljanje problema, što olakšava razumijevanje i njegovu analizu na brz i jednostavan način prikazujući uvid u problem i njegovo rješenje. Treba napomenuti kako je ona ograničena nemogućnošću rješavanja problema s više o dvije varijable.

Kroz rad su detaljno obrađeni različiti modeli koje su primijenjen u konkretnim situacijama. Na primjer, transportni model, model asignacije i model prehrane prikazuju kako uz pomoć linearnog programiranja je moguće optimizirati troškove transporta, raspodjelu resursa i optimizaciju prehrambenih potreba.

Primjena modela u bankarskom sektoru ilustrira kako menadžment banke može koristiti linearno programiranje za optimizaciju bilance i maksimizaciju dobiti uz što manje rizika, što potvrđuje učinkovitost linearnog programiranja. U ovom slučaju, model je koristio menadžment s ciljem optimiziranja kamatnih razlika između izvora i upotrebe sredstava s time da su se u obzir uzimala predviđanja kamatnih stopa i potražnje za bankarskim uslugama.

Slično tome, u marketingu se linearno programiranje koristi kako bi se riješili problemi vezani za optimizaciju oglašavanja. U radu se prikazuje kako se model može primijeniti za optimizaciju troškova oglašavanja, gdje se postavljaju ograničenja na broj oglasa u različitim medijima. Ovaj pristup omogućava tvrtkama da maksimiziraju pokrivenost potrošača uz minimalne troškove, što dodatno naglašava fleksibilnost i široku primijenjenost linearnih modela.

Praktična primjena linearnih modela u bankarskom sektoru, marketingu i drugim industrijama potvrđuju učinkovitost korištenja linearnog programiranju prilikom donošenja poslovnih odluka i optimiziranja zadataka. Rješenja dobivena linearnim programiranjem osim maksimiziranja dobiti i minimiziranja troškova, poboljšava razumijevanje složenih problema s kojima se menadžeri svakodnevno suočavaju.

Primjena modela linearnog programiranja u ekonomiji pokazuje da se modeli mogu koristiti za rješavanje stvarnih problema s visokim stupnjem uspješnosti. Važno je nastaviti s razvojem i primjenom novih metoda i modela koji će omogućiti još precizniju optimizaciju složenih problema s ciljem unaprjeđenja performansi organizacija u različitim industrijama.

8. ZAKLJUČAK

Linearno programiranje je moćan alat za optimizaciju i donošenje odluka u ekonomiji i poslovanju. Njegova široka primjena u različitim industrijama, od transporta, logistike do financija i marketinga, dokazuje njegovu učinkovitost u rješavanju problema kada organizacija ima ograničene resurse. Analizom metoda u radu (simpleks i grafička metoda) i modela (transportni model, model asignacije, model prehrane) dobio se uvid u načine na koje linearno programiranje može poboljšati učinkovitost organizacija i smanjiti im troškove.

Prednost linearnih modela i metoda je u njihovoj sposobnosti da obrade složene probleme i ponude konkretna rješenja, posebno kada ima puno varijabli. Jasno definirane varijable i ograničenja omogućuju menadžerima da brzo dođu od optimalnih rješenja i donesu koje će njihovim organizacijama donijeti boljitak. Time linearno programiranje postaje ključan alat u modernom poslovanju.

Nedostatak linearnog programiranja je pretpostavka da su svi odnosi među varijablama linearni i ne odgovara uvijek stvarnim situacijama, što može smanjiti primjenjivost modela u nekim kompleksnijim slučajevima. Kompleksni ekonomski sustavi su vrlo dinamični i u okolina se brzo mijenja, što može bit izazov prilikom dugoročnih planiranja, jer linearni modeli nisu uvijek prilagodljivi brzim promjenama na tržištu.

Unatoč nedostacima, primjena linearnih modela u ekonomiji, kao što je prikazano u radu poput optimizacije u bankarskom sektoru, marketingu i upravljanju portfeljem, pokazuje da linearno programiranje može donijeti velike koristi za organizacije. Optimizacija resursa i poboljšanje učinkovitosti rezultiraju nižim troškovima i boljim poslovnim rezultatima. Sposobnost linearnog programiranja da doprinese bržim i boljim poslovnim odlukama te da poveća efikasnost operacija dokazuje njegovu neophodnost u modernom poslovanju i ono igra značajnu ulogu u unapređenju poslovnih procesa i ostvarenju konkurentskih prednosti organizacija.

Buduća istraživanja trebala bi se usredotočiti na razvoj metoda i modela koji bi mogli rješavati probleme u dinamičnim i kompleksnim sustavima na efikasan način s ciljem rješavanja problema i unaprjeđenja performansi.

LITERATURA

1. Babić Z., (2017.). Modeli i metode poslovnog odlučivanja. Split: Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu
2. Barković, D. (2001.) Operacijska istraživanja, Osijek: Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Ekonomski fakultet Osijek
3. Brajdić, I., (2012.), Matematički modeli i metode poslovnog odlučivanja, Rijeka: Sveučilište u Rijeci, Fakultet za menadžment u turizmu i ugostiteljstvu
4. Kalpić, D., Mornar V., (1996.) Operacijska istraživanja, Zagreb: Zeus
5. Neralić, L., (2003.) Uvod u matematičko programiranje 1, Eelement Zagreb, Ekonomski fakultet u Zagrebu
6. Martić, Lj., (1966.) Matematičke metode za ekonomske analize, Narodne novine Zagreb
7. Perić, T., (2020.) Operacijska istraživanja, Ekonomski fakultet - Zagreb
8. Šimunović, K., Havrlišan, S., (2019.) Primjena linearnog programiranja u strojarstvu, Slavonski Brod, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu

Linkovi:

1. Barković D., Operacijska istraživanja u službi menadžera (1994.), dostupno na https://hrcak.srce.hr/file/331487 - pristupljeno: 03. 07. 2024.
2. Jergović M. Razvoj i primjene operacijskog istraživanja (2015.), dostupno na https://zir.nsk.hr/islandora/object/ffri%3A2161/datastream/PDF/view – pristupljeno: 03. 07. 2024.
3. Sikavica P.,. Skoko H i Bebek B., Tipurić D., Poslovno odlučivanje (1999.) Dostupno na. https://www.scribd.com/doc/133233158/Pere-Sikavica-Poslovno-Odlucivanje -05. 07. 2024.
4. Falak T., Matematički modeli u biokemiji (2014.), dostupno na: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:709839 – pristupljeno 08. 07. 2024.
5. Williams H. P. Model Buildin in Mathematical Programming, (2013.) dostupno na: https://books.google.hr/books?id=YJRh0tOes7UC&lpg=PP1&hl=hr&pg=PA3#v=onepage&q&f=false – pristupljeno 10. 07. 2024.
6. https://www.uky.edu/~dsianita/300/online/LP.pdf - pristupljeno: 10.07.2024.
7. Reić L., Plazibat B., Operacijska istraživanja u Ms Excelu (2015.), Sveučilište u Splitu https://www.oss.unist.hr/sites/default/files/file_attach/Operacijska%20istra%C5%BEi

vanja%20u%20MS%20Excelu%20-%20Bo%C5%BEe%20Plazibat.pdf, pristupljeno: 12. 07. 2024.

8. Jingyuam Zheng, Diet problem and the method linear programming (2022.) , dostupno na https://www.researchgate.net/publication/367540218_Diet_problem_and_the_method_linear_programming, pristupljeno :13.07. 2024.
9. Sheldon D. Balbirer and Shaw D., An Application of Linear Programming to Bank Financial Planning (1981.), dostupno na: https://www.jstor.org/stable/25060150 pristupljeno: 14.07.2023.
10. Agarana M. C, Bishop S. A i Odetunmibi O., Optimization of bank loan portfolio management usig goal programing techique (2014.), dostupno: https://www.researchgate.net/publication/277566943_Optimization_of_bank_loan_portfolio_management_using_goal_programing_technique pristupljeno: 16.07.2024.
11. https://medium.com/@melody.yangbin/optimizing-marketing-budget-allocation-a-linear-programming-approach-c5c847ad2de0 pristupljeno 14.07.2024.
12. Karagiannis S. & Tsoukatos E. & Papailias, T. (2003). Allocating Advertising Expenses Using Linear Programming and MS Excel. , dostupno: https://www.researchgate.net/publication/228287915_Allocating_Advertising_Expenses_Using_Linear_Programming_and_MS_Excel pristupljeno: 14. 07. 2024.
13. Oladejo, N. K., Abolarinwa, A., & Salawu, S. O. (2020). Linear programming and its application techniques in optimizing portfolio selection of a firm. Journal of Applied Mathematics, https://doi.org/10.1155/2020/8817909 , pristupljeno: 15. 07. 2024.
14. Sukono , Y. Hidayat, E. Lesmana, A. S. Putra , H. Napitupulu, S. Supian, Portfolio optimization by using linear programing models based on genetic algorithmPortfolio optimization by using linear programing models based on genetic algorithm (2018.), https://www.proquest.com/scholarly-journals/portfolio-optimization-using-linear-programing/docview/2556644002/se-2?accountid=44407 pristupljeno: 15. 07. 2024
15. Ajayi L . B., Rabiu D. I., Application of Linear Programming in Investment Portfolio Selection(2021.), https://www.researchgate.net/publication/353437623_Application_of_Linear_Programming_in_Investment_Portfolio_Selection_Using_Microsoft_Excel_13_International_Journal_of_Academic_Research_in_Business_Arts_and_Science_IJARBASCOM, pristupljeno: 15. 07. 2024.

Popis slikovnih priloga

Slika 1. Usporedba originalnog standardnog problema maksimuma i njegovog duala (izvor: Zadravec,2019:11) 12

Slika 2. Pretvaranje primala u dual (izrada autora) 13

Slika 3. Postavljanje funkcije cilja, restrikcija i uvjeta nenegativnost (izvor: izrada autora) 15

Slika 4. Postavljanje varijabli (izvor: izrada autora) 15

Slika 5. Postavljanje funkcije cilja i restrikcija (izvor: izrada autora) 16

Slika 6. Podaci u solveru(izvor: izrada autora) 17

Slika 7. Rješenje zadatka (izvor: izrada autora) 17

Slika 8. Postavljanje varijabli, funkcije cilja, restrikcija i uvjet nenegativnosti (izrada autora) 19

Slika 9. Priprema za grafički prikaz (izvor: izrada autora) 20

Slika 10. Rješenje pripreme za grafički prikaz (izvor: izrada autora) 20

Slika 11. Grafički prikaz restrikcija (izvor: izrada autora) 21

Slika 12. Dopuštena područja (izvor: izrada autora) 21

Slika 13. Dopušteno područje (izvor: izrada autora) 22

Slika 14. Točke rješenja (izvor: izrada autora) 22

Slika 15. Uvrštavanje točki rješenja na grafikon (izvor: izrada autora) 23

Slika 16. Točke rješenja od funkcije cilja (izvor: izrada autora) 23

Slika 17. Kordinate funkcije cilja (izvor: izrada autora) 24

Slika 18. Dodavanje optimalnog rješenja na grafikon (izvor: izrada autora) 24

Slika 19. Provjera zadovoljenosti restrikcija (izvor: izrada autora) 25

Slika 20. Matrični prikaz jediničnih transportnih troškova (izvor: Šimunović, Havrlišan, 2019:193) 27

Slika 21. Matrični prikaz transportiranih količina (izvor: Šimunović, Havrlišan, 2019:194) 28

Slika 22. Postavljanje zadatka (izvor: izrada autora) 28

Slika 23. Funkcija cilja (izvor: izrada autora) 29

Slika 24. Ograničenje ponude (izvor: izrada autora) 29

Slika 25. Ograničenje potražnje (izvor: izrada autora) 29

Slika 26. Prikaz zadataka u rješavatelju (izvor: izrada autora) 30

Slika 27. Rješenje zadatka (izvor: izrada autora) 30

Slika 28. Troškovi u eurima za svakog predstavnika po području 32
Slika 29. Postavljanje zadatka (izvor: izrada autora) 33
Slika 30. Podaci uneseni u solver (izvor: izrada autora) 34
Slika 31. Rješenje zadatka (izvor: izrada autora) 34
Slika 32. Rješenje zadatka za 1. obrok (izrada autora) 36
Slika 33. Rješenje zadatka za 2. obrok 36
Slika 34. Rješenje zadatka (izvor: izrada autora) 43
Slika 35. Rješenje zadatka (izvor: izrada autora) 46
Slika 36. Podaci uneseni u solver (izvor: izrada autora) 46

Popis tablica

Tablica 1. Popis namirnica 35
Tablica 2. Varijable odluka koje se predstavljaju imovinu (izvor: Balbirer, Shaw, 1981:79) 39
Tablica 3. Varijable odluka koje se predstavljaju obveze (izvor: Balbirer, Shaw, 1981:79) 39
Tablica 4. Podaci iz zadatka 41