

Analiza graničnih vrijednosti i tehnike optimizacije

Šćuka, Filip

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Economics in Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Ekonomski fakultet u Osijeku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:145:870350>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-09**



Repository / Repozitorij:

[EFOS REPOSITORY - Repository of the Faculty of Economics in Osijek](#)



Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Ekonomski fakultet u Osijeku
Diplomski studij, Ekonomska politika i regionalni razvitak

Filip Šćuka

Analiza graničnih vrijednosti i tehnike optimizacije

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Ekonomski fakultet u Osijeku
Diplomski studij, Ekonomska politika i regionalni razvitak

Filip Šćuka

Analiza graničnih vrijednosti i tehnike optimizacije

Diplomski rad

Kolegij: Mikroekonomska analiza i politika

JMBAG: 0010212328

e-mail: filscuka@efos.hr

Mentor: prof. dr. sc. Ivan Kristek

Osijek, 2021.

Josip Juraj Strossmayer University of Osijek
Faculty of Economics in Osijek
Graduate, Study Economical politics and regional management

Filip Šćuka

Margin analyse and optimisation techniques

Graduate paper

Osijek, 2021.

**IZJAVA
O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI,
PRAVU PRIJENOSA INTELKTUALNOG VLASNIŠTVA,
SUGLASNOSTI ZA OBJAVU U INSTITUCIJSKIM REPOZITORIJIMA
I ISTOVJETNOSTI DIGITALNE I TISKANE VERZIJE RADA**

1. Kojom izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je diplomski rad isključivo rezultat osobnoga rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu. Potvrđujem poštivanje nepovredivosti autorstva te točno citiranje radova drugih autora i referiranje na njih.

2. Kojom izjavljujem da je Ekonomski fakultet u Osijeku, bez naknade u vremenski i teritorijalno neograničenom opsegu, nositelj svih prava intelektualnoga vlasništva u odnosu na navedeni rad pod licencom Creative Commons Imenovanje – Nekomercijalno – Dijeli pod istim uvjetima 3.0 Hrvatska.

3. Kojom izjavljujem da sam suglasan/suglasna da se trajno pohrani i objavi moj rad u institucijskom digitalnom repozitoriju Ekonomskoga fakulteta u Osijeku, repozitoriju Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku te javno dostupnom repozitoriju Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (u skladu s odredbama Zakona o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju, NN br. 123/03, 198/03, 105/04, 174/04, 02/07, 46/07, 45/09, 63/11, 94/13, 139/13, 101/14, 60/15).

4. izjavljujem da sam autor/autorica predanog rada i da je sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti istovjetan sa dovršenom tiskanom verzijom rada predanom u svrhu obrane istog.

Ime i prezime studenta/studentice: Filip Šćuka

JMBAG: 0010212328

OIB: 05925626401

e-mail za kontakt: filscuka@efos.hr

Naziv studija: Ekonomska politika i regionalni razvitak

Naslov rada: Analiza graničnih vrijednosti i tehnike optimizacije

Mentor rada: izv. prof. dr. sc. Ivan Kristek

U Osijeku, 2021. godine

Potpis Filip Šćuka

Analiza graničnih vrijednosti i tehnike optimizacije

SAŽETAK

Kako bi poduzeće ostvarilo svoj cilj, a to je maksimizacija dobiti, što utječe na kasnije investicije u proizvodnju, poput dodatnih postrojenja, proširenja postojećih, tehnološki napredak i tako dalje, poduzeće mora svoju trenutnu proizvodnju optimizirati. Optimizirati proizvodnju znači odrediti najbolji omjer uložениh resursa kako bi se ostvarili što bolji rezultati. Kako bi odredili koji je to najbolji omjer uložениh resursa poduzeće se koristi analizom proizvodnje, kroz analizu proizvodne funkcije, analizu troškova te analizu prihoda kroz ukupne, prosječne i granične vrijednosti. Poduzeće također pomoću diferencijalnog računa, odnosno kroz prvu i drugu derivaciju mogu odrediti koji su maksimum i minimum proizvodne funkcije. Tehnike optimizacije koje se koriste za ostvarenje prvotnog cilja, što je maksimiziranje dobiti su: maksimizacija profita putem ukupnih prihoda i ukupnih troškova te analizom graničnih vrijednosti. Tehnika optimizacije putem ukupnih prihoda i troškova uzima zbroj prihoda ostvarenih od prodaje te od njih oduzima ukupne troškove te traži omjer inputa koji ostvaruje najveći profit. Tehnika optimizacije putem analize graničnih vrijednosti kaže da bi poduzeće trebalo povećavati proizvodnju dok god krivulja graničnih prihoda nadmašuje krivulju graničnih rashoda.

Ključne riječi: ukupna vrijednost, prosječna vrijednost, granična vrijednost, diferencijalni račun, tehnike optimizacije

Margin analyse and optimisation techniques

ABSTRACT

In order for a company to achieve its goal, which is to maximize profits, which affects subsequent investments in production, such as additional subsidiary, expansion of existing ones, technological advances and so on, the company must optimize its current production. Optimizing production means determining the best ratio of invested resources in order to achieve the best possible results. In order to determine the best ratio of invested resources, the company uses production analysis, through the analysis of the production function, cost analysis and revenue analysis through total, average and threshold values. The company can also use the differential calculus, through the first and second derivation, to determine the maximum and minimum production functions. The optimization techniques used to achieve the original goal, which is profit maximization, are: profit maximization through total income and total outcome, and margin value analysis. The technique of optimization through total revenues and costs takes the sum of revenues generated from sales and subtracts the total costs from them and looks for the ratio of inputs that make the highest profit. The optimization technique through the analysis of marginal values say that the company should increase production as long as the marginal revenue curve exceeds the marginal expenditure curve.

Keywords: total value, average value, margin value, differential calculus, optimization techniques

Sadržaj

SAŽETAK.....	5
ABSTRACT	6
Popis kratica i simbola	8
1. UVOD	1
2. Metodologija rada	2
2.1. Predmet i cilj rada.....	2
2.2. Struktura diplomskog rada.....	2
2.3. Znanstvene metode	3
3. Ekonomske veličine u kratkom vremenskom razdoblju	4
3.1. Proizvodna funkcija	4
3.1.1. Ukupni proizvod	4
3.1.2. Prosječni proizvod	6
3.1.3. Granični proizvod	8
3.2. Analiza prihoda.....	10
3.2.1. Ukupni prihod	10
3.2.2. Prosječni prihod.....	13
3.2.3. Granični prihod	14
3.3. Analiza troškova	16
3.3.1. Ukupni troškovi.....	21
3.3.2. Prosječni trošak	22
3.3.3. Granični troškovi.....	24
4. Diferencijalni račun.....	26
4.1. Određivanje maksimuma ili minimuma pomoću diferencijalnog računa.....	27
5. Tehnike optimizacije.....	29
5.1. Maksimizacija profita putem ukupnih prihoda i ukupnih troškova.....	29
5.2. Optimizacija putem analize graničnih vrijednosti	32
6. Zaključak.....	35
LITERATURA.....	37
Popis tablica	38
Popis grafikona.....	38

Popis kratica i simbola

AR – prosječni prihod

ATC – prosječni ukupni trošak

FC – fiksni trošak

L - rad

MR – granični prihod

N.J. – novčana jedinica

P - cijena

Q - količina

SMC – granični trošak

TC – ukupni trošak

T_r - ukupni prihod

TVC – ukupni varijabilni trošak

VC – varijabilni trošak

w – cijena rada / plaća

1. UVOD

Proizvodnja je najbitniji proces koji se odvija unutar poduzeća. Ona povezuje direktno ili indirektno povezuje sve članove poduzeća, te se sve akcije vrte oko proizvodnje, radilo se to o nabavi materijala, isplaćivanja plaće radnicima, odluke o vodstvu, sve utječu na proizvodni proces. Proizvodnja je, dakle, usmjerena aktivnost koja povezuje sve članove unutar poduzeća i vanjske suradnike, koja uključuje potrebne materijalne i nematerijalne resurse i strojeve kako bi se izradio proizvod u svrhu prodaje i profita, koji je glavni cilj poduzeća.

Kako bi poduzeće ostvarilo svoj cilj, a to je maksimizacija dobiti, što utječe na kasnije investicije u proizvodnju, poput dodatnih postrojenja, proširenja postojećih, tehnološki napredak i tako dalje, poduzeće mora svoju trenutnu proizvodnju optimizirati. Optimizirati proizvodnju znači odrediti najbolji omjer uložениh resursa kako bi se ostvarili što bolji rezultati. Kako bi odredili koji je to najbolji omjer uložениh resursa poduzeće se koristi analizom proizvodnje, kroz analizu proizvodne funkcije, analizu troškova te analizu prihoda kroz ukupne, prosječne i granične vrijednosti. Kako se određuju te vrijednosti biti će obrađeno kroz cjelinu ekonomskih vrijednosti u kratkoročnom vremenskom razdoblju gdje će se kroz pojašnjenja kroz primjere iz života, tablice te grafičke vrijednosti pojasniti i prikazati svaka funkcija pojedinačno.

Poduzeće pomoću diferencijalnog računa, odnosno kroz prvu i drugu derivaciju mogu odrediti koji su maksimum i minimum proizvodne funkcije. Funkcija derivacije, te određivanje maksimuma i minimuma funkcije biti će pojašnjeni kroz poglavlje diferencijalnog računa.

Tehnike optimizacije koje se koriste za ostvarenje prvotnog cilja, što je maksimiziranje dobiti su: maksimizacija profita putem ukupnih prihoda i ukupnih troškova te analizom graničnih vrijednosti. Tehnika optimizacije putem ukupnih prihoda i troškova uzima zbroj prihoda ostvarenih od prodaje te od njih oduzima ukupne troškove te traži omjer inputa koji ostvaruje najveći profit. Tehnika optimizacije putem analize graničnih vrijednosti kaže da bi poduzeće trebalo povećavati proizvodnju dok god krivulja graničnih prihoda nadmašuje krivulju graničnih rashoda.

2. Metodologija rada

2.1. Predmet i cilj rada

Predmet ovog rada su tehnike optimizacije u proizvodnji te tehnike optimizacije proizvodnje, kako analizirati proizvodni proces te kako optimizacijom postići maksimum te samim tim i maksimizirati prihode.

Cilj rada jest objasniti ekonomske veličine u kratkoročnom vremenskom razdoblju. Objasniti ukupne, prosječne i granične veličine kroz prihode, rashode i proizvodnju u poduzeću. Pojasniti kako je to primjenjivo u stvarnom svijetu, odnosno kroz primjere pojasniti situacije rasta proizvodnje i prihoda te zašto se događa to da, s rastom proizvodnje, ukupni prihodni rastu, dok prosječni proizvod i prosječni prihod po jedinici rada, te granični proizvod i prihod počinju slabije rasti ili opadati.

Nadalje, pokušati će se ukratko pojasniti diferencijalni račun, kako se on koristi u svrhu određivanja optimalne proizvodnje, odnosno, kako se koristi da bi se maksimizirala dobit poduzeća. Nakon toga će obraditi tehnike optimizacije proizvodnje. Optimizacija je proces koji obuhvaća analizu postojećeg proizvodnog procesa te ga mijenja kako bi se poboljšali učinci te proizvodnje, odnosno kako bi se maksimizirao učinak te na taj način minimizirali troškovi, a profit maksimizirala.

2.2. Struktura diplomskog rada

Diplomski rad podijeljen je u tri poglavlja:

- Ekonomske veličine u kratkoročnom vremenskom razdoblju
- Diferencijalni račun
- Tehnike optimizacije

Poglavlje ekonomske veličine u kratkoročnom vremenskom razdoblju odnosi se na analizu proizvodne funkcije, analizu prihoda te analizu rashoda. Za svaku od tri će se pojasniti što je ona te analizirati njihove ukupne, prosječne te granične vrijednosti.

U poglavlju diferencijalnog računa objasnit će se pojam diferencijalnog računa te obraditi funkcija deriviranja i druga derivacija, te objasniti koja je svrha deriviranja u analizi proizvodnje.

2.3. Znanstvene metode

Za potrebe diplomskog rada koristit će se određene znanstvene metode. Korištene znanstvene metode su sljedeće:

- Deduktivna metoda kojom će se opisivati temeljni pojmovi diplomskog rada;
- Metoda kompilacije kojom će se preuzeti izvori podataka citirati sukladno pravilima o citiranju;
- Metoda deskripcije kojom će se opisati različiti se različiti pojmovi te slikovni prikazi u diplomskom radu;
- Metoda analize kojom će se objasniti složeni podaci i brojčane vrijednosti;
- Matematička metoda će se koristiti za obradu brojčanih podataka koja će većinski biti korištena u praktičnom dijelu diplomskog rada;

3. Ekonomske veličine u kratkom vremenskom razdoblju

Kratki rok, odnosno kratkoročje, je vremenski period u kojemu proizvođač može utjecati na jednu varijablu u proizvodnom procesu dok ostale ostaju fiksne, odnosno ostaju nepromijenjene.

Utjecaj promjena određenog proizvodnog faktora prate se kroz tri skupine vrijednosti, koji mogu biti troškovi, prihod ili proizvod.

Tri skupine kroz koji se može pratiti utjecaj promjene proizvodnog faktora na proizvodnju, odnosno na proizvod ili troškove, su:

- Ukupne vrijednosti
- Prosječne vrijednosti
- Granične vrijednosti

3.1. Proizvodna funkcija

3.1.1. Ukupni proizvod

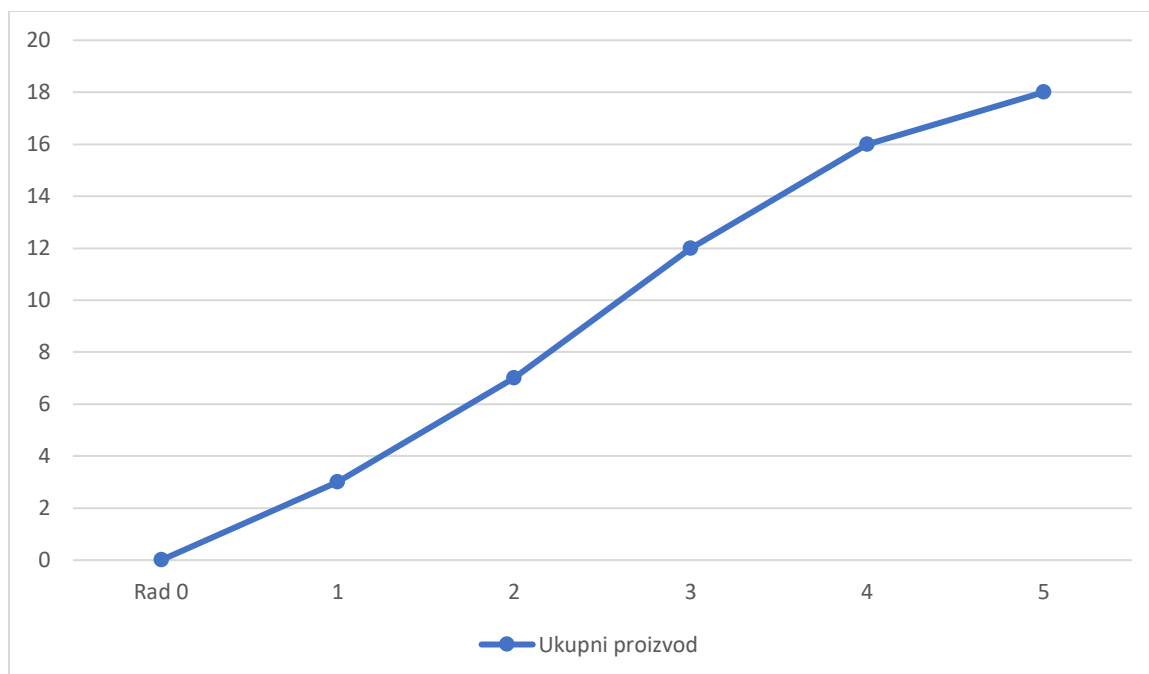
Ukupna vrijednost je ukupna, sumirana proizvodnja, nekoga dobra. Ukupna vrijednost pokazuje kolika će biti ukupna proizvodnja uz određene uvijete, odnosno, uz određeni unos inputa proizvodnje, poput rada. Pod pretpostavkom da će svi ostali proizvodni faktori ostati nepromijenjeni, povećanjem unosa nekog proizvodnog faktora, rada, rasti će i krivulja proizvodnog faktora.

Tablica 1 Ukupni proizvod s povećanjem rada

Rad	Ukupni proizvod
0	0
1	3
2	7

3	12
4	16
5	18

Izvor: izrada autora



Grafikon 1 Ukupni proizvod s povećanjem rada

Izvor: izrada autora

Kao što je vidljivo u grafu i tablici, s dodatkom dodane jedinice rada ukupni proizvod je porastao. Linija ukupnog proizvoda po jedinicama rada također razdvaja moguću od nemoguću proizvodnju. Proizvodnja iznad linije ukupnog proizvoda je nemoguća proizvodnja, odnosno proizvodnja koja prema danim uvjetima, odnosno jedinici rada, neće nikada moći biti ostvarena. Nadalje proizvodnja koja se nalazi ispod linije ukupnog proizvoda je moguća, no nije optimalna. Proizvodnja ispod linije ukupnog proizvoda označava da proizvodni inputi nisu posloženi na najbolji mogući način te da je moguće poboljšati iskorištenost.

3.1.2. Prosječni proizvod

Prosječni proizvod je ukupni proizvod po jedinici proizvodnog čimbenika.

$$\text{Prosječni proizvod rada} = \frac{\text{Ukupni proizvod}}{\text{Količina rada}}$$

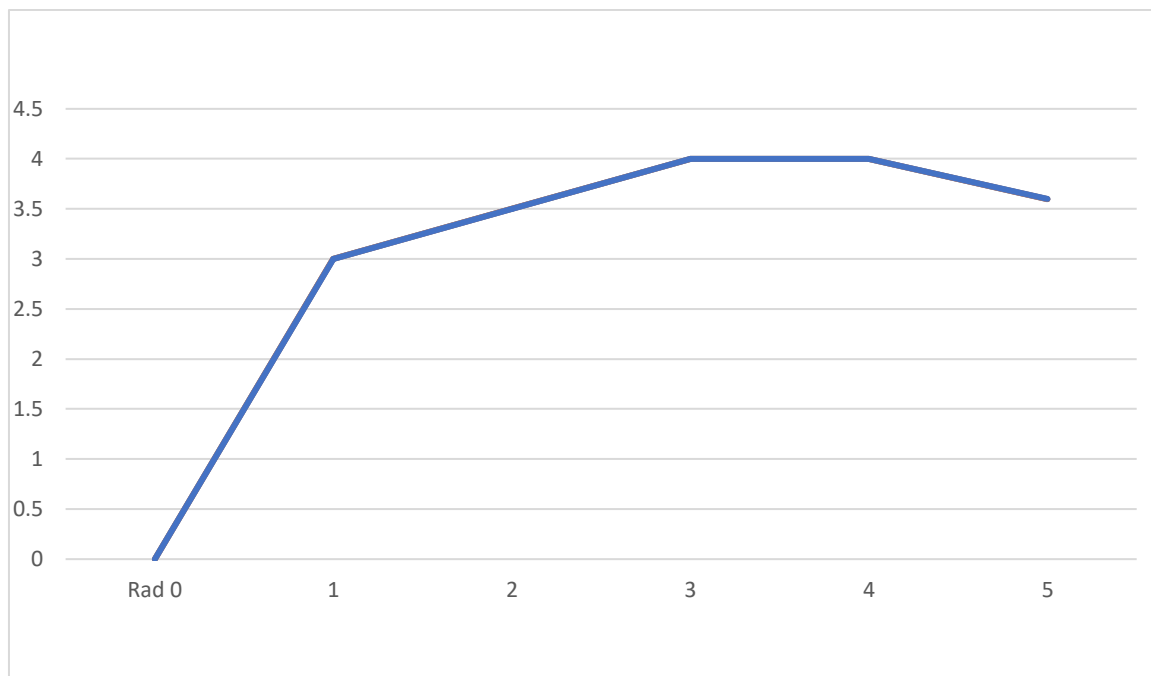
Prema primjeru iz tablice 1 izračunava se prosječni proizvod, što je prikazano u sljedećoj tablici:

Tablica 2 Prosječni proizvod

Rad	Ukupni proizvod	Prosječni proizvod
0	0	0
1	3	3
2	7	3,5
3	12	4
4	16	4
5	18	3,6

Izvor: izrada autora

Kada to postavimo u grafikon:



Grafikon 2 Prosječni proizvod rada

Izvor: izrada autora

Kao što je vidljivo, prosječni proizvod po jedinici rada rastao je do 3 jedinice rada, zatim je počeo opadati iako smo dodali dodatne jedinice koje su rezultirale povećanjem ukupne proizvodnje. Takav proces rasta i pada proizvodnje s povećanjem jedinica rada proizlazi iz toga što se s povećanjem jedinica rada, odnosno zaposlenika, događa povećanje specijalizacije u proizvodnji te rasta produktivnosti, a kasnije smanjenje produktivnosti se događa iz razloga što dolazi do nedostatka materijala ili jednostavno zbog praznog hoda koji se događa u trenucima kada radnici nemaju što obavljati jer su radne stanice popunjene. Uzimajući za primjer lanac brze prehrane, ako postoji više radnih stanica, poput one za pečenje mesa, pripremanje priloga, slaganje i posluživanje, produktivnost će rasti s povećanjem radnika dok god sve stanice nemaju dovoljnu količinu, zatim prosječni proizvod po jedinici radnika opada, jer sa zapošljavanjem dodatnog radnika, taj radnik nema što raditi ako su sve stanice popunjene, te prosječni proizvod opada.

3.1.3. Granični proizvod

Granični proizvod označava proizvod dodatne jedinice proizvodnog faktora, u ovom slučaju rada. Računa se kao promjena ukupnog proizvoda podijeljena s promjenom proizvodnog faktora:

$$\text{Granični proizvod rada} = \frac{\Delta \text{Ukupni proizvod}}{\Delta \text{Rad}}$$

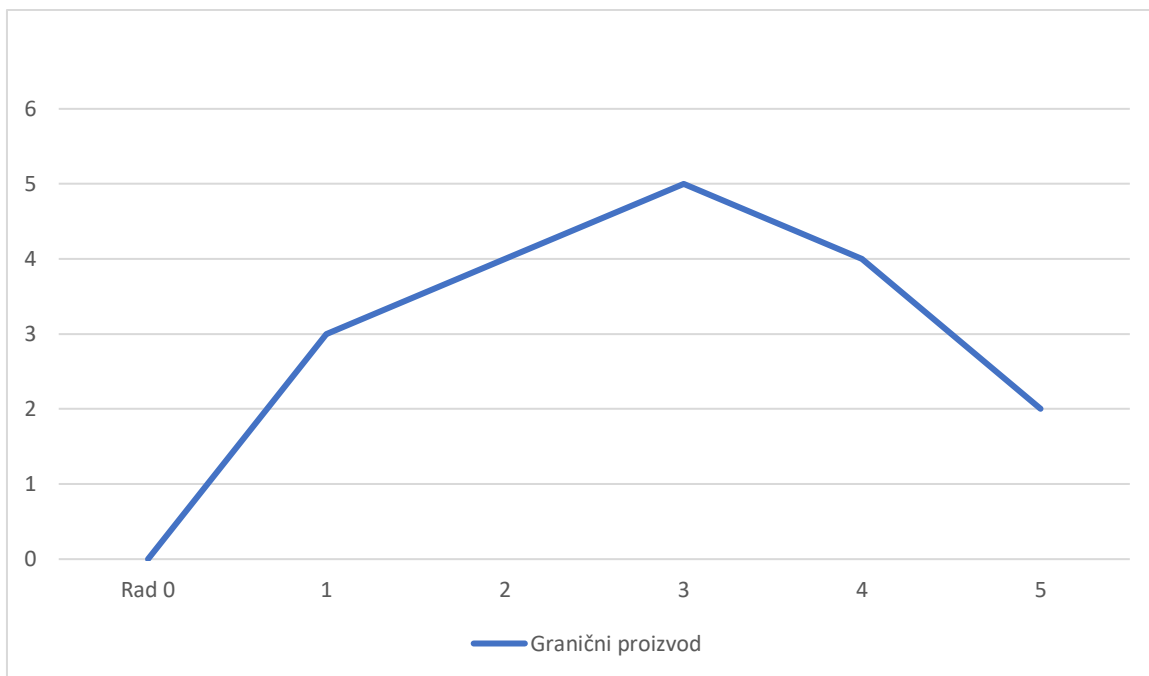
Uzimajući prethodni primjer, granični proizvod za tvrtku bi izgledao:

Tablica 3 Granični proizvod

Rad	Ukupni proizvod	Prosječni proizvod	Granični proizvod
0	0	0	-
1	3	3	3
2	7	3,5	4
3	12	4	5
4	16	4	4
5	18	3,6	2

Izvor: izrada autora

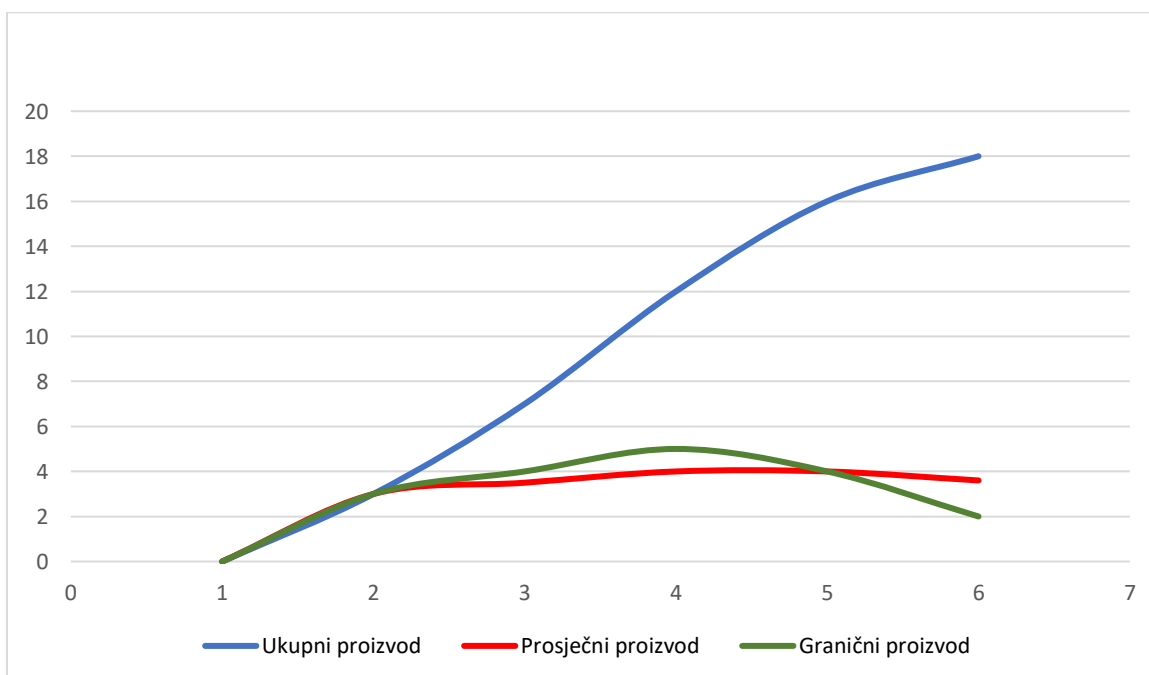
Grafički prikazano:



Grafikon 3 Granični proizvod

Izvor: izrada autora

Kada se ukupna, prosječna i granična vrijednost proizvodnje stave na isti grafikon:



Grafikon 4 Ukupni, prosječni i granični proizvod

Izvor: izrada autora

Prema posljednjem grafikonu jasno je vidljivo kako, bez obzira na to što ukupni proizvod raste, granični i prosječni proizvod počinju opadati što daje naznake kako veća proizvodnja, odnosno što više uloženi jedinica rada, možda i nije optimalna razina proizvodnje. Uzimajući ponovno za primjer lance prehrane. Dodatna jedinica rada može nositi sa sobom povećanje ukupne proizvodnje, no kao što je već rečeno, ta jedinica neće biti maksimalno iskorištena. U situacijama kada su stanice popunjene, dodatni radnik ne može obavljati svoj posao, jer za tim nema potrebe. Dodatni radnik može raditi posao kada se radna stanica oslobodi, zbog odlaska na pauze ili zbog bilo kojeg razloga koji sprječava zaposleniku bivanje na svojoj radnoj stanici, tada ta dodatna jedinica može iskoristiti svoj potencijal. To objašnjava zašto dodatna jedinica rada može povećati ukupan proizvod ali prosječan i granični proizvod opadaju, zbog nepotpunog iskorištenja potencijala.

3.2. Analiza prihoda

3.2.1. Ukupni prihod

Prihod je vrijednost koju poduzetnik može ostvariti poslovanjem, odnosno prodajom u određenom razdoblju. To znači da je ukupni prihod suma prihoda prodaje pojedinačnih proizvoda.

Matematička formula za računanje ukupnog prihoda je umnožak prodajne cijene proizvoda i prodane količine, odnosno:

$$\text{Ukupni prohod} = \text{cijena proizvoda} * \text{prodana količina}$$

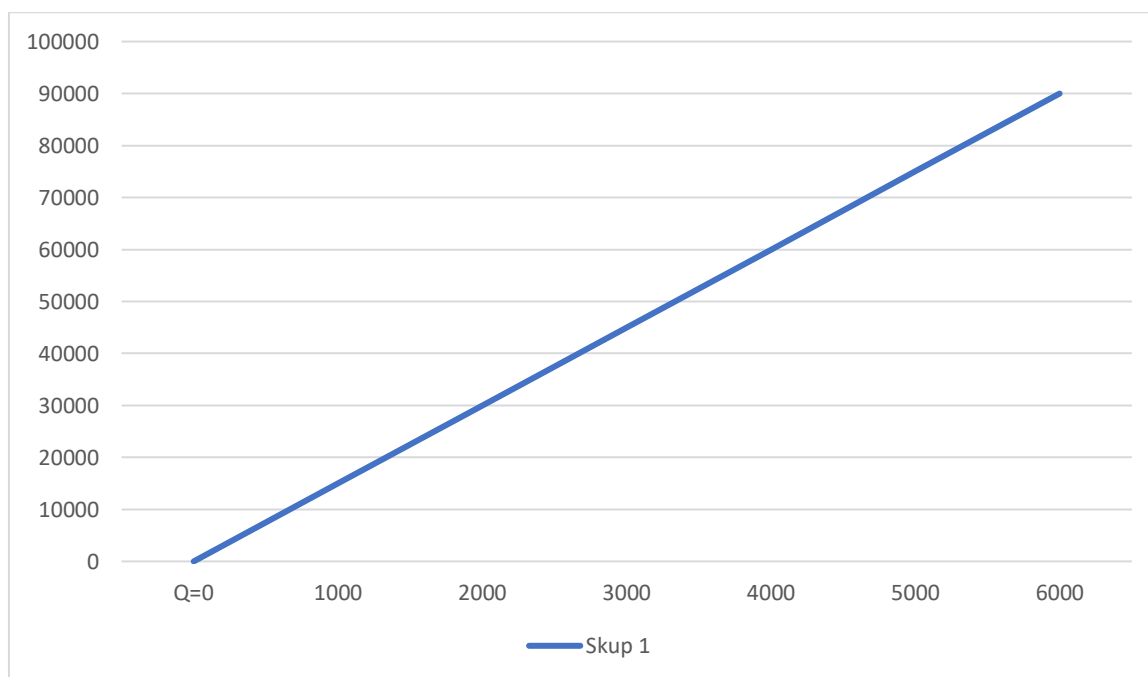
$$T_r = P * Q$$

Pod pretpostavkom da se poduzeće nalazi u uvjetima savršene konkurencije, a proizvod XY, za kojega je potražnja savršeno elastična, prodaje po cijeni od 15 novčanih jedinica. Možda Izračun ukupnog prihoda za navedeni proizvod prikazan je u tablici 4;

Tablica 4 Ukupni prihod u uvjetima savršene konkurencije

Cijena proizvoda	Potraživana količina	Ukupni prihod
15 n.j.	1000	15000
	2000	30000
	3000	45000
	4000	60000
	5000	75000
	6000	90000

Izvor: izrada autora



Grafikon 5 Ukupni prihod u uvjetima savršene konkurencije

Izvor: izrada autora

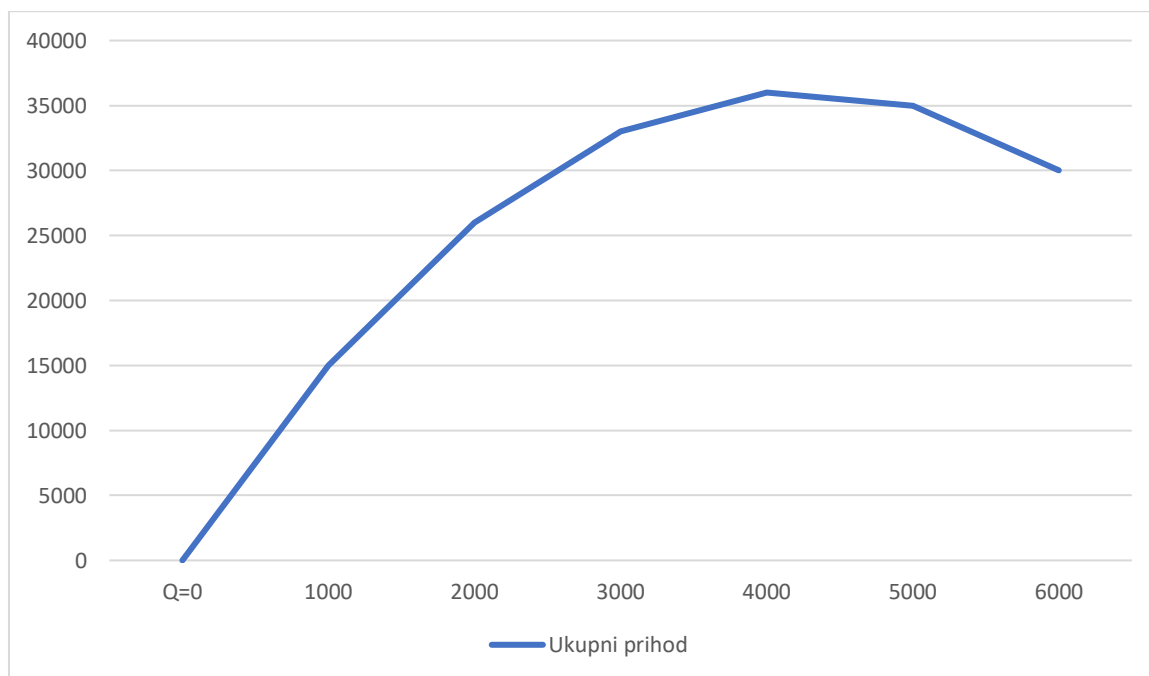
No situacija gotovo nikada nije takva. U situaciji nesavršene konkurencije, ako proizvođač želi prodati velike količine proizvoda, prodajna cijena istoga mora biti smanjena. Cijena proizvoda će postupno padati dok ne dođe do minimalne cijene.

Tablica 5 Ukupni prihod u uvjetima nesavršene konkurencije

Cijena proizvoda	Potraživana količina	Ukupni prihod
------------------	----------------------	---------------

15	1000	15000
13	2000	26000
11	3000	33000
9	4000	36000
7	5000	35000
5	6000	30000

Izvor: izrada autora



Grafikon 6 Ukupni prihod u uvjetima nesavršene konkurencije

Izvor: izrada autora

U uvjetima nesavršene konkurencije ukupan prihod nije linearna funkcija. On će rasti do određene količine i cijene nakon koje počne opadati. Ponovo je vidljivo kako najveća proizvodnja ne znači i najbolja, odnosno optimalna proizvodnja.

3.2.2. Prosječni prihod

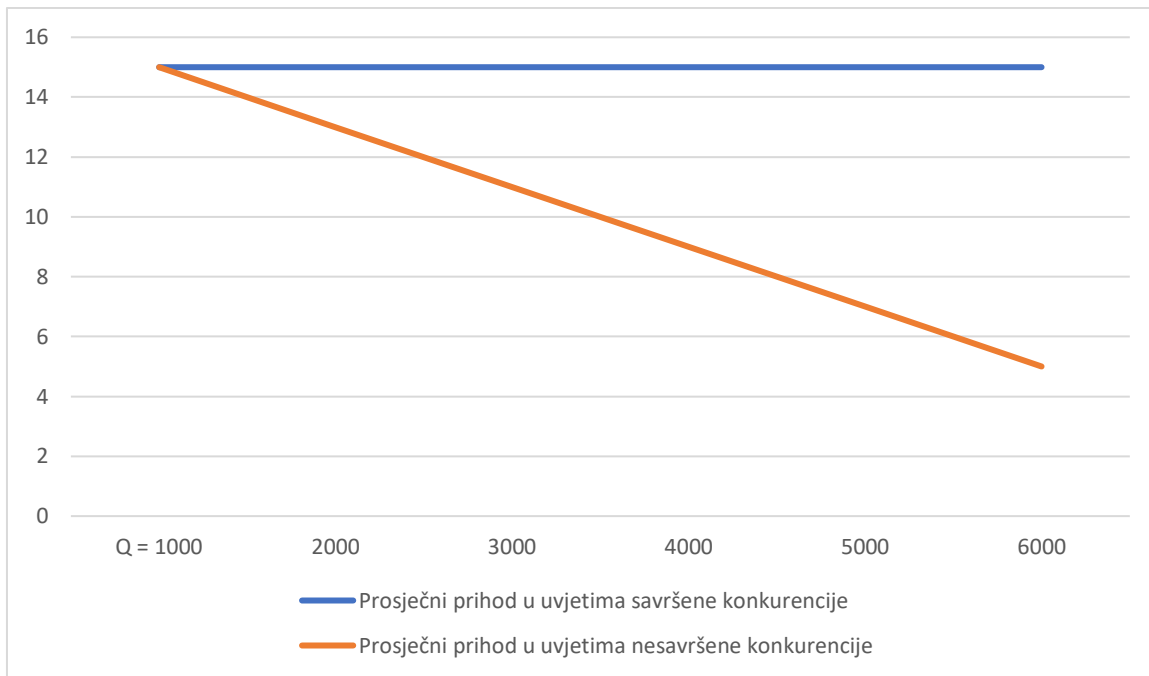
Prosječni prihod je prihod po jedinici prodanog proizvoda.

$$AR = \frac{T_r}{Q}$$

Tablica 6 Prosječni prihod

Q	Uvjeti savršene konkurencije			Uvjeti nesavršene konkurencije		
	P	T _r	AR	P	T _r	AR
1000	15	15000	15	15	15000	15
2000		30000	15	13	26000	13
3000		45000	15	11	33000	11
4000		60000	15	9	36000	9
5000		75000	15	7	35000	7
6000		90000	15	5	30000	5

Izvor: izrada autora



Grafikon 7 Prosječni prihod

Izvor: izrada autora

Prosječni prihod u savršenoj konkurenciji je konstantan jer su uvjeti u savršenoj konkurenciji takvi da su svi proizvođači nedovoljno veliki da bi utjecali na cijenu, previše ih je te su proizvodi međusobno zamjenjivi, kupaca je puno te su svi mali kupci koji također ne mogu utjecati na cijenu te im je svejedno koji proizvod kupuju te im je također svejedno od kojeg proizvođača kupuju, zato prosječan prohod od proizvoda u takvim uvjetima ne opada. Nasuprot tome u uvjetima nesavršene konkurencije, postoji mnogo faktora, od veličine poduzeća i kupaca, dostupnosti informacija, itd. koji utječu na to da će se veća poduzeća, odnosno s većom proizvodnjom boriti, odnosno čuvati svoj udio na tržištu zbog već uhodanog i jeftinije procesa proizvodnje, te će im prosječan prihod s povećanjem proizvodnje opadati.

3.2.3. Granični prihod

Granični prihod je prihod po dodanoj jedinici prodanog proizvoda. Računa se kao promjena ukupnog prihoda podijeljena s promjenom prodane količine proizvoda, odnosno:

$$MR = \frac{\Delta T_r}{\Delta Q}$$

U uvjetima savršene konkurencije, granični prihod je jednak prosječnom prihodu:

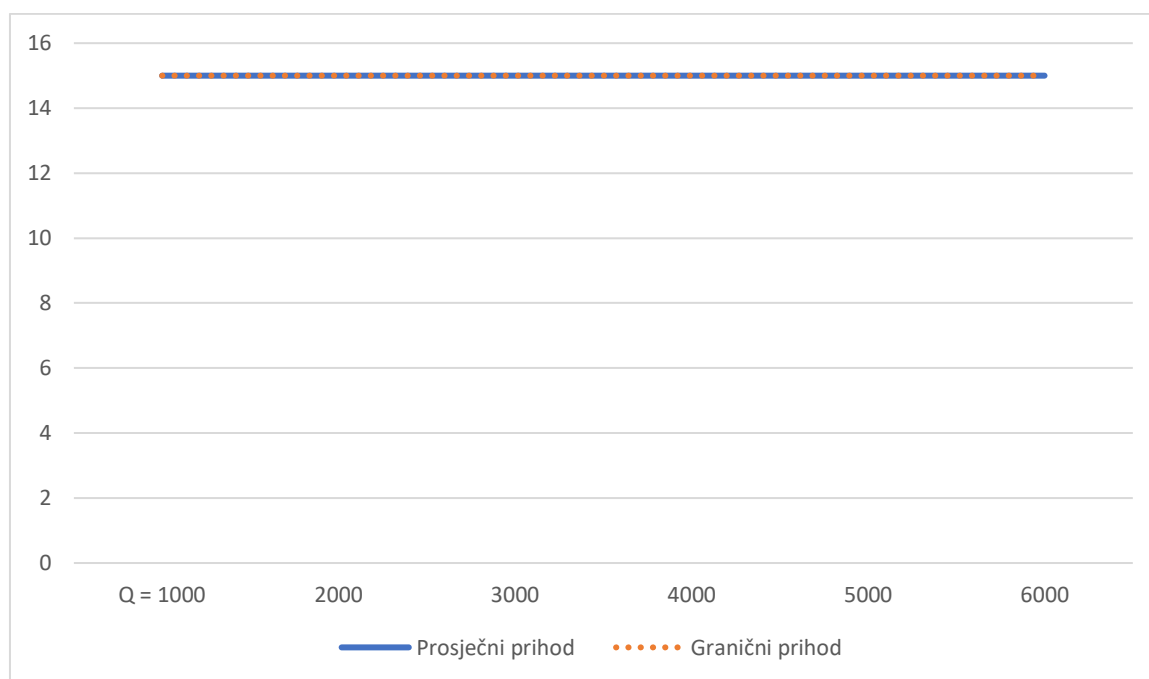
$$AR = MR$$

Tablica 7 Granični prihod u uvjetima savršene konkurencije

Q	Uvjeti savršene konkurencije			
	P	T _r	AR	MR
1000	15	15000	15	15
2000		30000	15	15
3000		45000	15	15
4000		60000	15	15
5000		75000	15	15
6000		90000	15	15

Izvor: izrada autora

Grafički prikazano:



Grafikon 8 Prosječni prihod i granični prihod u uvjetima savršene konkurencije

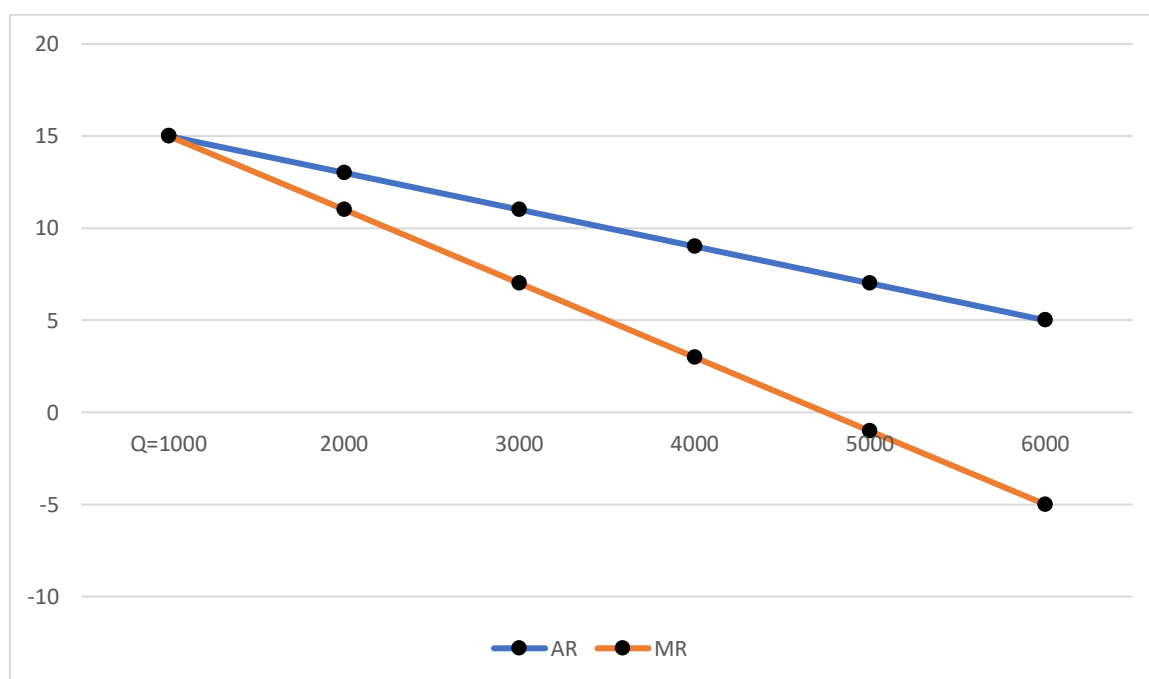
Izvor: izrada autora

No u uvjetima nesavršene konkurencije situacija je drugačija:

Tablica 8 Granični prihod u uvjetima nesavršene konkurencije

Q	Uvjeti nesavršene konkurencije			
	P	T_r	AR	MR
1000	15	15000	15	15
2000	13	26000	13	11
3000	11	33000	11	7
4000	9	36000	9	3
5000	7	35000	7	-1
6000	5	30000	5	-5

Izvor: izrada autora



Grafikon 9 Prosječni i granični troškovi u uvjetima nesavršene konkurencije

Izvor: izrada autora

3.3. Analiza troškova

Troškovi su izdaci koje snosi poslovni subjekt tokom poslovanja, te su oni mjerilo ekonomske učinkovitosti. Za mikroekonomsku analizu najbitniji su sljedeći:

- Društveni i privatni
- Eksplicitni i implicitni

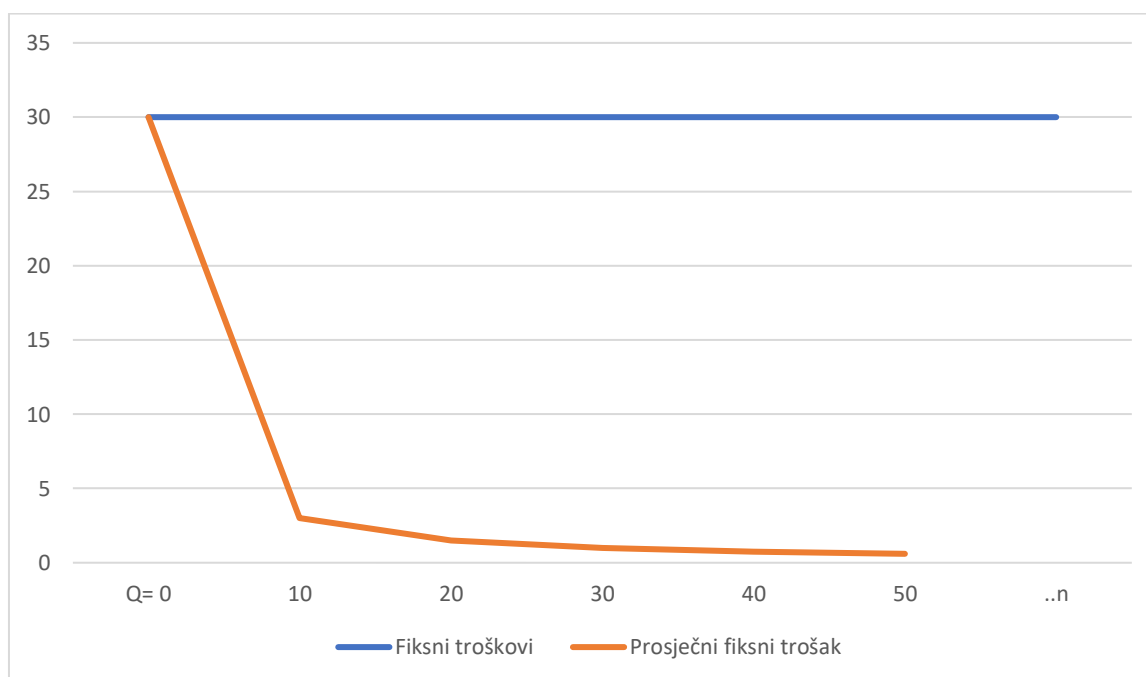
- Troškovi u kratkom i u dugom roku (Karić, 2010)

„Predmet istraživanja mikroekonomske analize su privatni troškovi, od kojih su najbitniji implicitni i eksplicitni troškovi. Implicitni troškovi su troškovi koji se odnose na potrošnju vlastitih resursa, odnosno resursa koji su u posjedu vlasnika poduzeća te oni nisu povezani s novčanim izdacima. Eksplicitni troškovi, s druge strane, su troškovi koji su tuđi – uvezeni resursi. Oni mogu biti kupljeni ili unajmljeni te su povezani sa stvarnim novčanim izdacima.“ (Karić, 2010)

Kada govorimo o troškovima u kratkom roku, moguće ih je podijeliti na:

- Fiksne
- Varijabilne

Fiksni troškovi su stalni troškovi koji se pojavljuju bez obzira na proizvodnju, to mogu biti troškovi iznajmljivanja prostora, porezi na imovinu i slično. Oni su dakle jednaki na svim razinama proizvodne, što znači da će prosječni fiksni trošak proizvodnje (AFC) biti viši na nižim razinama proizvodnje dok će s porastom proizvodnje naglo opadati te nastaviti s padom ali što je proizvodnja veća to će pad biti blaži:



Grafikon 10 Fiksni troškovi i prosječni fiksni troškovi

Izvor: izrada autora

Tablično prikazano, prosječni fiksni trošak s povećanjem obujma proizvodnje opada:

Tablica 9 Prosječni fiksni trošak

Fiksni trošak	Broj proizvedenih jedinica (Q)	Prosječni fiksni trošak po jedinici proizvodnje (FC/Q)
30 NJ	10	3
	20	1,5
	30	1
	40	0,75
	50	0,6

Izvor: izrada autora

Varijabilni troškovi su oni koji se mijenjaju s opsegom proizvodnje. Kada proizvodnje nema, varijabilni troškovi (VC) biti će jednaki nuli, $VC=0$. Kada se poveća obujam proizvodnje, s njim će rasti i varijabilni troškovi.

Formula za varijabilne troškove glasi $VC = w * L$

To označava kako je varijabilni trošak jednak cijeni rada pomnoženoj s količinom utrošenog resursa rada.

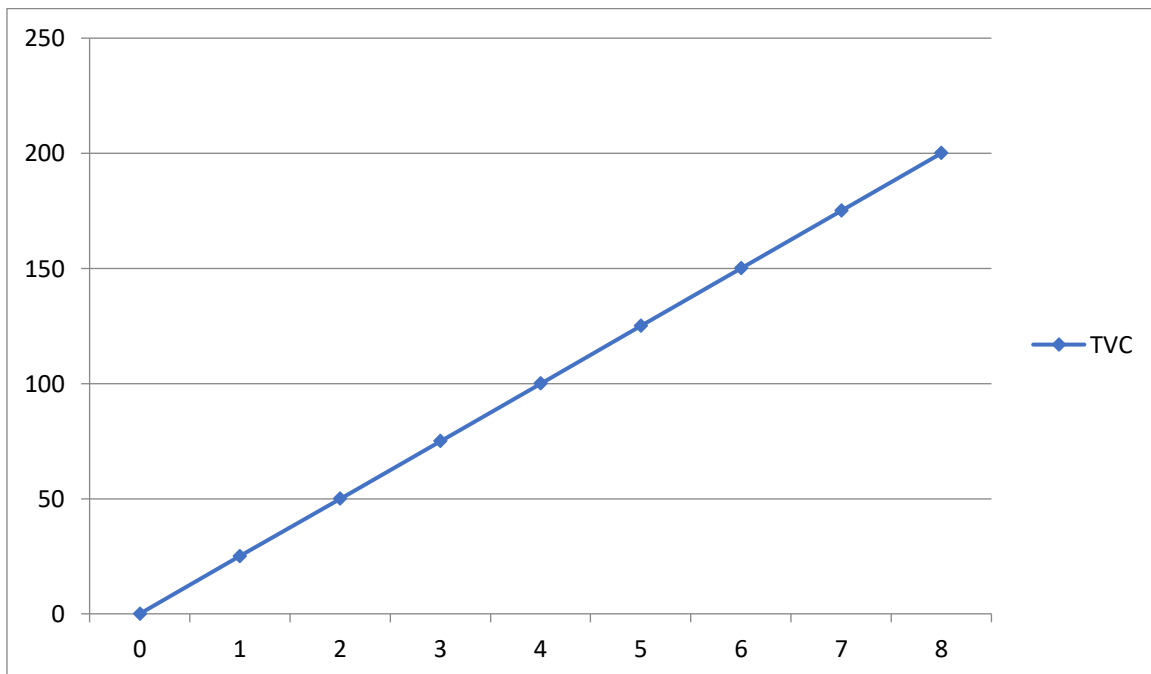
Tablica 10 Prosječan varijabilni trošak po proizvodu

Broj radnika	Cijena rada/h	Ukupni varijabilni trošak	Ukupni proizvod	Prosječan proizvod po radniku	Prosječan varijabilni trošak po proizvodu
0	0	0	0	0	0
1	25	25	5	5	5
2	25	50	30	15	1,66
3	25	75	89	29,66	0,84
4	25	100	157	39,25	0,64
5	25	125	230	46	0,54
6	25	150	290	48,33	0,52
7	25	175	320	45,71	0,55
8	25	200	340	42,5	0,59

S povećanjem broja radnika raste i ukupni output, odnosno, povećava se obujam proizvodnje te je veća količina finalnog proizvoda. S povećanjem radnika također dolazi do sve veće specijalizacije tokom proizvodnje. Što je više radnika to će jedan radnik raditi manji obujam posla, što znači da će jedan radnik biti zadužen primjerice za pripremu materijala, drugi za rad sa strojem, a treći s pakiranjem proizvoda.

No s povećanjem broja radnika nakon određene točke, u ovom slučaju šest radnika. Unajmljivanjem sedmoga radnika dolazi do pada proizvodnje po radniku. U proizvodnji sa šest radnika prosječan broj proizvoda po radniku iznosio je 48,33 jedinice proizvoda po satu, dok u slučaju sa sedam radnika prosječan broj proizvoda po jednom radniku iznosi 45,71 proizvod po satu. Što znači da, iako proizvodnja i dalje raste, efikasnost radnika zapravo opada.

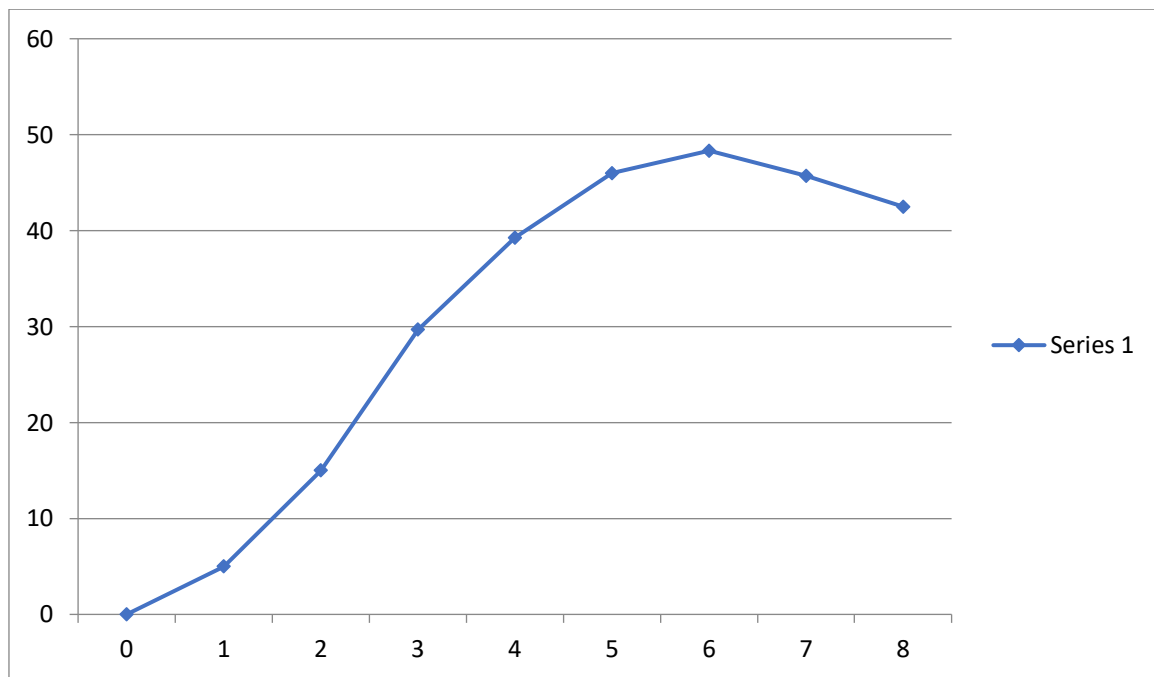
Grafički prikaz varijabilnih troškova u ovom slučaju je:



Grafikon 11 Ukupni varijabilni troškovi

Izvor: izrada autora

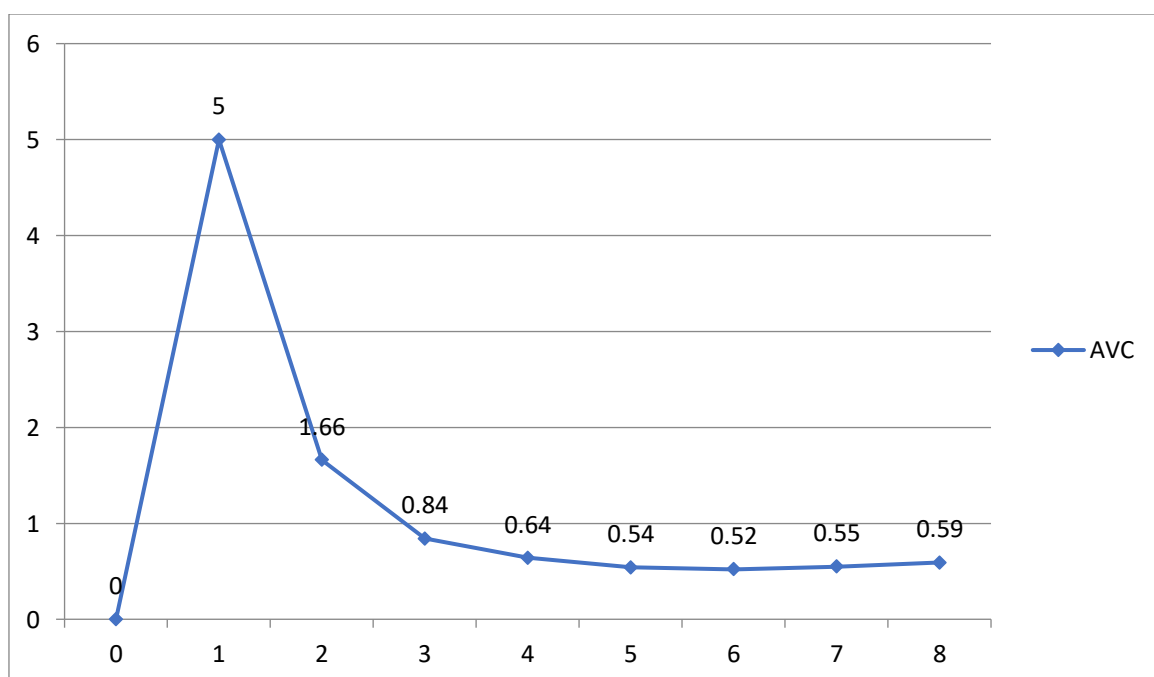
Prosječni proizvod po radniku:



Grafikon 12 Prosječan proizvod po radniku

Izvor: izrada autora

Prosječni varijabilni trošak:



Grafikon 13 Prosječni varijabilni trošak

Izvor: izrada autora

Kao što je vidljivo i iz grafičkih prikaza, u trenutku kada prosječan proizvod po radniku počne opadati, na sedmom radniku, tada i prosječan varijabilni trošak počinje rasti, a do te točke padao, osim u točki gdje nema proizvodnje, tamo nema niti varijabilnih troškova.

3.3.1. Ukupni troškovi

Ukupni varijabilni troškovi su zbroj fiksnih i varijabilnih troškova.

$$TC = FC + TVC$$

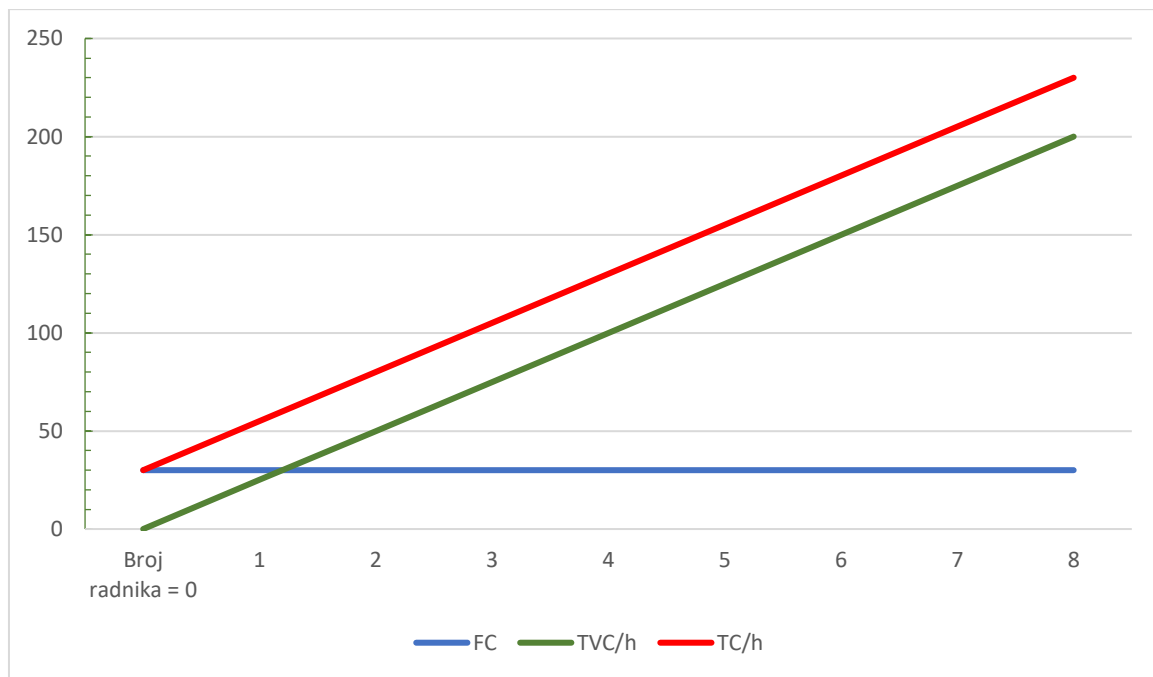
Uzimajući primjer iz gore navedenih tablica varijabilnih i fiksnih troškova, ukupni troškovi bi izgledali:

Tablica 11 Ukupni troškovi

FC/h	Cijena rada/h	Broj radnika	Ukupna proizvodnja	TVC/h	TC/h
30	25	0	0	0	30
		1	5	25	55
		2	30	50	80
		3	89	75	105
		4	157	100	130
		5	230	125	155
		6	290	150	180
		7	320	175	205
		8	340	200	230

Izvor: izrada autora

Grafički prikazano:



Grafikon 14 Fiksni i varijabilni troškovi

Izvor: izrada autora

Iz grafičkog prikaza vidljivo je kako ukupni troškovi rastu s povećanjem obujma proizvodnje, odnosno, s povećanjem broja radnika. No porast ukupnih troškova uzrokovan je varijabilnim troškovima. Troškovi, u situaciji bez proizvodnje, iznose 30 N.J., odnosno vrijednost fiksnih troškova. S povećanjem proizvodnje fiksni troškovi se ne mijenjaju, dok varijabilni rastu. S rastom varijabilnih troškova rastu i ukupni troškovi.

3.3.2. Prosječni trošak

Prosječan trošak računa se po jedinici proizvoda. To znači da bi prosječan trošak po jedinici proizvoda bio zapisan kao $AC = \frac{TC \text{ (ukupni trošak)}}{Q \text{ (količina proizvodnje)}}$

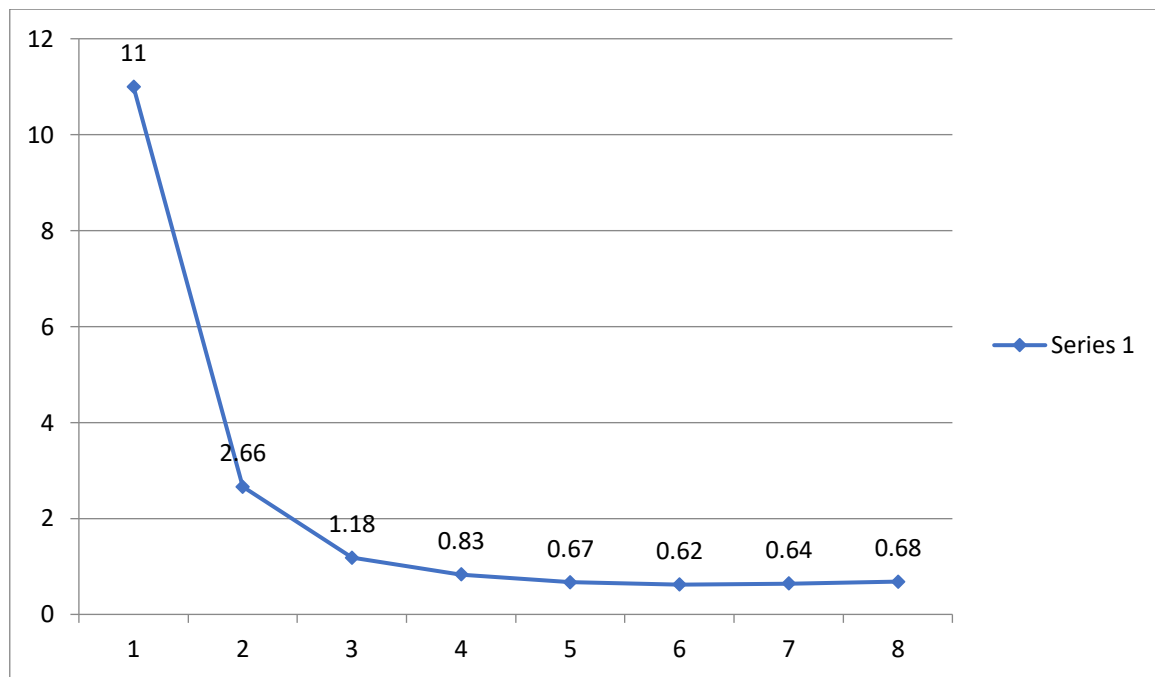
Kada tu formulu primijenimo u gore navedenom slučaju, prosječan ukupni trošak po jedinici proizvodnje iznositi će:

Tablica 12 Prosječni trošak

FC/h	Cijena rada/h	Broj radnika	Ukupna proizvodnja	TVC/h	TC/h	Prosječan ukupan trošak po jedinici proizvoda (ATC)
30	25	0	0	0	30	-
		1	5	25	55	11
		2	30	50	80	2,66
		3	89	75	105	1,18
		4	157	100	130	0,83
		5	230	125	155	0,67
		6	290	150	185	0,62
		7	320	175	205	0,64
		8	340	200	230	0,68

Izvor: izrada autora

Grafički prikazan prosječan ukupni proizvod po jedinici proizvoda izgledati će:



Grafikon 15 Prosječan ukupni trošak

Izvor: izrada autora

Kao što je vidljivo iz tablice i iz grafičkog prikaza, prosječni ukupni trošak padao je s povećanjem proizvodnje do točke od 6 radnika, s dodatnim povećanjem radne snage prosječni ukupni trošak počeo je rasti te bi rastao sve više kako bi se proizvodnja povećavala. Povećanje prosječnog ukupnog troška znači pad prihoda tvrtke, te tvrtka ne bi trebala zaposliti sedmog radnika ako bi htjela ostvarivati minimalne troškove.

3.3.3. Granični troškovi

Granični trošak označava povećanje troškova s jediničnim povećanjem proizvodnje. Odnosno, koliko će rasti troškovi s povećanjem ukupnog outputa za jednu jedinicu.

Formula za granični trošak je $SMC = \frac{\Delta TVC}{\Delta Q}$

Ovu formulu moguće je proširiti jer ukupni varijabilni trošak umnožak cijene rada (w) i količine resursa rada (L). $TVC = w * L$

Tako da će formula glasniti $SMC = \frac{w \cdot \Delta L}{\Delta Q}$

Iz formule možemo zaključiti kako granični trošak, uz danu cijenu rada w , raste s povećanjem količine rada ako se proizvodnja ne povećava proporcionalno, a pada ako se može povećati količina proizvodnje bez dodavanjem dodatne jedinice rada.

Tablica 13 Granični troškovi

Cijena rada/h	Broj radnika	Ukupna proizvodnja	TVC/h	SMC = (w*ΔL)/ΔQ
25	0	0	0	-
	1	5	25	5
	2	30	50	1
	3	89	75	0,42
	4	157	100	0,37
	5	230	125	0,34
	6	290	150	0,41
	7	320	175	0,83
	8	340	200	1,25

Izvor: izrada autora

Iz prijašnjeg primjera vidljivo je da pri nižim razinama proizvodnje svaka dodatna jedinica rada rezultirati će sa sve većim povećanjem proizvodnje. To znači kako će nazivnik, odnosno količina proizvodnje rasti većim intenzitetom nego količina rada. Pri većim razinama proizvodnje bit će potrebno više sve više rada kako bi se proizvela dodatna jedinica proizvodnje, odnosno, brojnik će rasti brže od nazivnika.

4. Diferencijalni račun

Diferencijalni račun je područje matematičke analize. Njime se ispituju funkcije koristeći se derivacijama istih. Na otkrivanju diferencijalnog računa radili su Gottfried Wilhelm Leibniz i Isaac Newton u 17. stoljeću. Leibniz je ispitivao diferencijalni račun na području geometrije, dok je Isaac Newton ispitivao u mehanici.

Za poduzeća je bitno jer pomaže pri određivanju optimalne proizvodnje. Odnosno, pomaže pri utvrđivanju minimalnih i maksimalnih vrijednosti funkcija.

Derivacije predstavljaju jedno od najvažnijih područja matematičke analize. Derivacija se uvodi na sljedeći način:

Ako za realnu funkciju f realne varijable u točki x postoji

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Tada dobivenu vrijednost se označava s

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$$

I zove se derivacijom funkcije f u točki x , te se kaže da je funkcija f derivabilna u točki x . Na skupu svih točaka u kojima je funkcija f derivabilna, definirana je nova funkcija f' koju se naziva derivacijom funkcije f . Drugim riječima, derivacija zavisne veličine f u odnosu na nezavisnu veličinu x govori koliko se brzo promijeni veličina f s promjenom vrijednosti x . (Štefan Trubić M., 2017.)

Pravila deriviranja:

1. Derivacija konstante

$$Y=a \qquad \frac{dy}{dx} = 0$$

2. Derivacija umnoška funkcije i konstantnog faktora

$$Y = aX^b \qquad \frac{dy}{dx} = b * a * X^{(b-1)}$$

3. Derivacija zbroja

$$Y = U \pm V \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dU}{dX} \pm \frac{dV}{dX}$$

4. Derivacija umnoška

$$Y = U * V \qquad \frac{dy}{dx} = U \frac{dV}{dX} + V \frac{dU}{dX}$$

5. Derivacija razlomka

$$Y = U/V \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{V \left(\frac{dU}{dX} \right) - U \left(\frac{dV}{dX} \right)}{V^2}$$

6. Derivacija funkcije funkcije

$$Y = f(U), \text{ gdje je } U = g(X) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dU} * \frac{dU}{dx}$$

4.1. Određivanje maksimuma ili minimuma pomoću diferencijalnog računa

Nakon što se proizvodna funkcija derivira, dobivene točka nam ne određuje da li se radi o maksimumu ili minimumu funkcije. Kako bi se saznalo koja točka je minimum a koja maksimum, potrebno je upotrijebiti drugu derivaciju.

Druga derivacija je derivacija već jednom derivirane funkcije. Primjerice, proizvodna funkcija je funkcija ukupnog prihoda te je $TR=250Q-14Q^2$. Znači:

$$TR = 250Q - 14Q^2$$

Nakon što se prvi puta primjene pravila deriviranja dobije se:

$$\frac{dTR}{dQ} = 250 - 14 * 2 * Q^{(2-1)}$$

$$\frac{dTR}{dQ} = 250 - 24Q$$

$$0 = 250 - 24Q \quad /24$$

$$Q = 10,42$$

Kako bi se odredilo da li je točka minimum ili maksimum koristi se druga derivacija:

$$\frac{dTR}{dQ} = 250 - 24Q$$

$$\frac{d^2TR}{dQ^2} = -24$$

$$-24 < 0$$

Ako je $d^2Y/dX^2 > 0$ znači da se radi o minimumu funkcije, dok ako je $d^2Y/dX^2 < 0$, to znači da se radi o maksimumu funkcije. U prethodnom primjeru vidimo kako se radi o maksimumu funkcije.

5. Tehnike optimizacije

Optimizacija je proces koji obuhvaća analizu postojećeg proizvodnog procesa te ga mijenja kako bi se poboljšali učinci te proizvodnje, odnosno kako bi se maksimizirao učinak te na taj način minimizirali troškovi, a profit maksimizirala.

5.1. Maksimizacija profita putem ukupnih prihoda i ukupnih troškova

Uzimajući primjer troškova iz poglavlja 3 i tablicu ukupnih troškova:

Tablica 14 Ukupni troškovi

FC	Cijena rada	Broj radnika	Ukupna proizvodnja	TVC	TC
30	25	0	0	0	30
		1	5	25	55
		2	30	50	80
		3	89	75	105
		4	157	100	130
		5	230	125	155
		6	290	150	180
		7	320	175	205
		8	340	200	230

Izvor: izrada autora

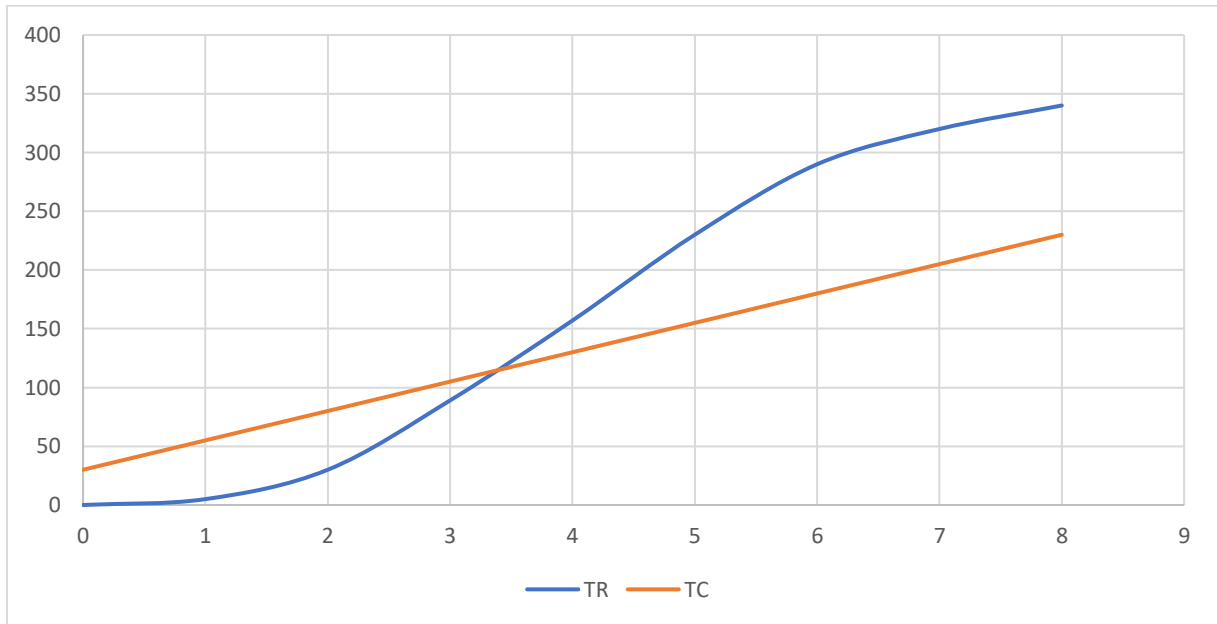
Povezujući primjer ukupnih troškova s prihodima ostvarenih od prodaje tih proizvoda po cijeni od 1 novčanoj jedinici, ostvaruje se prihod:

Tablica 15 Prihod od prodaje

Broj radnika	Ukupni proizvod	Prihod od prodaje
0	0	0
1	5	5
2	30	30
3	89	89

4	157	157
5	230	230
6	290	290
7	320	320
8	340	340

Izvor: izrada autora



Grafikon 16 Ukupni prihodi i ukupni troškovi prikazani grafički

Izvor: izrada autora

Ukupni prihod računa se kao razlika između ukupnih prihoda i ukupnih rashoda, odnosno troškova. Zapisano u formuli: $\pi = TR - TC$. Uvrštavajući gore navedeni primjer u ovu jednadžbu, počevši od $Q=0$, TR kod $Q=0$ je 0, što znači da nema prihoda od prodaje, dok je TC 30, a to označava kako i bez proizvodnje postoje troškovi zbog fiksnih troškova koji su neovisni o proizvodnji. Rezultat za ukupni prihod kod $Q=0$ iznosi $\pi=0-30=-30$. Uzimajući za primjer kod $Q=1$, ukupni prihod iznosi $\pi=5-55=-50$ itd.

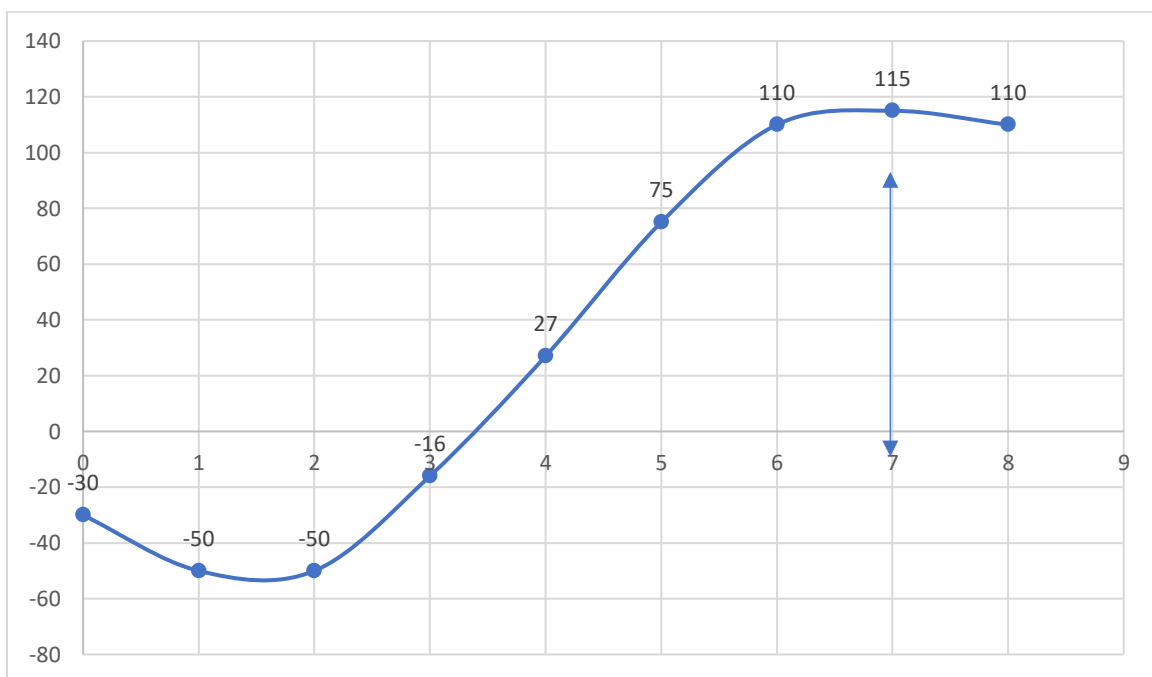
Svi rezultati zapisani u tablici:

Tablica 16 Ukupni prihod

Količina radnika	Ukupni prihod $\pi = TR - TC$
0	-30
1	-50

2	-50
3	-16
4	27
5	75
6	110
7	115
8	110

Izvor: izrada autora



Grafikon 17 Grafički prikaz ukupnog prihoda

Izvor: izrada autora

Kao što je vidljivo iz grafičkog prikaza, najveći ukupni prihod ostvaruje se u proizvodnji sa 7 radnika, gdje je prihod od prodaje 320 a ukupni troškovi 205, te samim time i ukupni prihod $3\pi=115$.

5.2. Optimizacija putem analize graničnih vrijednosti

Iako kod analize ukupnih prihoda poduzeća poduzeće ostvaruje maksimalan prihod, za bolju optimizaciju proizvodnje koristi se analiza graničnih vrijednosti, te je ona jedno od najvažnijih načela menadžerske ekonomije. Ova analiza uspoređuje granične prihode s graničnim troškovima. Granični troškovi su, kao što je već opisano u poglavlju 3.3.3., promjena ukupnih troškova po jedinici promjene proizvodnje, a granični prihodi, prema poglavlju 3.2.3., promjena ukupnog prihoda prema dodatnoj jedinici proizvodnje. Zapisano u formulama:

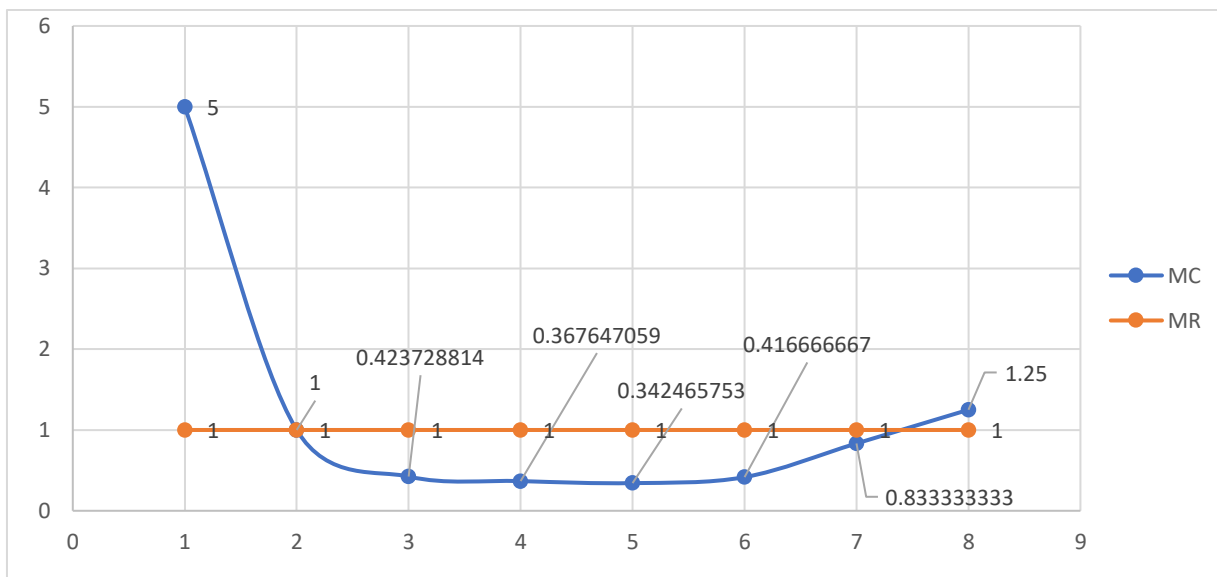
$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q} \qquad MR = \frac{\Delta T_r}{\Delta Q}$$

Analizom primjera iz poglavlja 5.1., za maksimizaciju profita putem analize ukupnih prihoda, analizirati će se isti metodama optimizacije putem graničnih prihoda.

Tablica 17 Analiza graničnih prihoda i troškova na primjeru

Broj radnika	Ukupni proizvod	TC	TR	MC	MR
0	0	30	0	-	-
1	5	55	5	5	1
2	30	80	30	1	1
3	89	105	89	0.423729	1
4	157	130	157	0.367647	1
5	230	155	230	0.342466	1
6	290	180	290	0.416667	1
7	320	205	320	0.833333	1
8	340	230	340	1.25	1

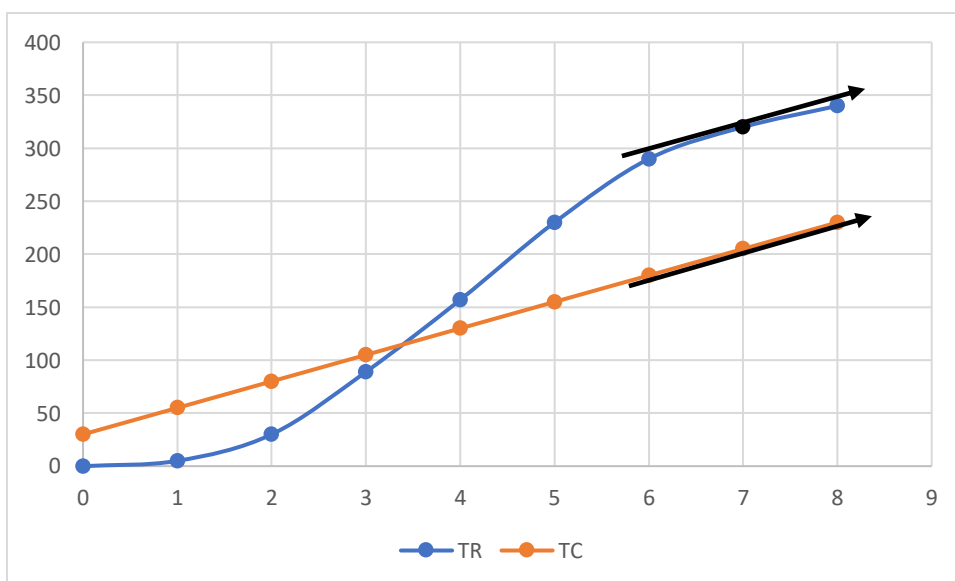
Izvor: izrada autora



Grafikon 18 Grafički prikaz optimizacije putem graničnih vrijednosti

Izvor: izrada autora

Prema analizi graničnih vrijednosti, poduzeće bi trebalo povećavati proizvodnju dok god krivulja graničnih prihoda (**MR**) nadmašuje krivulju graničnih rashoda (**MC**). To se može očitati i kroz grafički prikaz ukupnih prihoda od prodaje te ukupnih rashoda:



Grafikon 19 ukupni prihod prošireni analizom graničnih vrijednosti

Izvor: izrada autora

Kao što je vidljivo i u grafičkom prikazu 19, tek kod proizvodnje sa više od 7 radnika nagib krivulje ukupnih prihoda postaje manji od nagiba ukupnih troškova što znači da je optimalna proizvodnja proizvodnja sa 7 radnika, što se poklapa s tehnikom optimizacije prema ukupnim prihodima i ukupnim troškovima.

6. Zaključak

S obzirom da je proizvodnja najbitniji proces koji se odvija unutar poduzeća, koji povezuje direktno ili indirektno povezuje sve članove poduzeća, te se sve akcije vrte oko proizvodnje, radilo se to o nabavi materijala, isplaćivanja plaće radnicima, odluke o vodstvu, sve utječu na proizvodni proces. Te kao što je već rečeno, da je proizvodnja usmjerena aktivnost koja povezuje sve članove unutar poduzeća i vanjske suradnike, koja uključuje potrebne materijalne i nematerijalne resurse i strojeve kako bi se izradio proizvod u svrhu prodaje i profita, koji je glavni cilj poduzeća. Jasno je vidljivo zašto se pokušavalo otkriti kako doći do optimalne proizvodnje jer je jasno kako je proizvodni proces onaj koji donosi profit, a optimalnom proizvodnjom se postiže i maksimizirani profit.

Kada se govori o ekonomskim vrijednostima u kratkoročju, ukupne veličine su suma neke jedinice, radilo se to o proizvodu, prihodu ili trošku, ukupna vrijednost je zbroj svih jedinica. Prosječna vrijednost govori o vrijednosti po jedinici dobra, primjerice radi li se o prosječnom trošku po proizvodu, uzima se ukupni trošak te se stavlja u odnos s brojem jedinica proizvoda, dobivena vrijednost govori koliko iznosi trošak po jedinici proizvoda. Granična vrijednost govori o vrijednosti dodatne jedinice proizvoda. Radi li se o graničnom prihodu, računa se kao suma ukupnog prihoda poslije dodavanja nove jedinice proizvoda umanjena za prihod nakon dodavanja nove jedinice proizvoda, ta vrijednost se stavlja u omjer s promjenom u količini proizvoda, znači $Q_2 - Q_1$ te dobivena vrijednost govori o tome koliko je prihod donijela ta dodatna jedinica.

Diferencijalni račun je područje matematičke analize te se njime ispituju funkcije koristeći se derivacijama istih. Postoji 6 funkcija deriviranja, a to su:

1. Derivacija konstante
2. Derivacija umnoška funkcije i konstantnog faktora
3. Derivacija zbroja
4. Derivacija umnoška
5. Derivacija razlomka
6. Derivacija funkcije funkcije

Za određivanje maksimuma i minimuma funkcije koristi se druga derivacija.

Optimizacija je proces koji obuhvaća analizu postojećeg proizvodnog procesa te ga mijenja kako bi se poboljšali učinci te proizvodnje, odnosno kako bi se maksimizirao učinak te na taj način minimizirali troškovi, a profit maksimizirala. Optimizacije koje se koriste maksimizaciju

profiti su maksimizacija putem ukupnih prihoda i ukupnih troškova gdje se od ukupnih prihoda oduzimaju ukupni troškovi te za proizvodnju odabire ona proizvodnja kod koje je najveću ukupni profit. Druga optimizacija koja se koristi je optimizacija putem analize graničnih prihoda, ona je jedno od najvažnijih načela menadžerske ekonomije. Ona uspoređuje granične prihode s graničnim troškovima te, prema ovoj tehnici, poduzeće bi trebalo povećavati proizvodnju dok god krivulja graničnih prihoda nadmašuje krivulju graničnih rashoda.

LITERATURA

Mikroekonomika / Marijan Karić.- Osijek: Ekonomski fakultet, 2006.

Mikroekonomija, Pavić I., Benić Đ., Hashi I., Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu, 2006.

Mikroekonomska analiza, Babić M., 4.izmijenjeno i dopunjeno izdanje, Zagreb 1997.

Ekonomija za menadžere, Salvatore D., 2. izdanje , Zagreb 1994.

Popis tablica

Tablica 1 Ukupni proizvod s povećanjem rada	4
Tablica 2 Prosječni proizvod.....	6
Tablica 3 Granični proizvod.....	8
Tablica 4 Ukupni prihod u uvjetima savršene konkurencije	11
Tablica 5 Ukupni prihod u uvjetima nesavršene konkurencije	11
Tablica 6 Prosječni prihod.....	13
Tablica 7 Granični prihod u uvjetima savršene konkurencije	15
Tablica 8 Granični prihod u uvjetima nesavršene konkurencije	16
Tablica 9 Prosječni fiksni trošak	18
Tablica 10 Prosječan varijabilni trošak po proizvodu	18
Tablica 11 Ukupni troškovi.....	21
Tablica 12 Prosječni trošak	23
Tablica 13 Granični troškovi.....	25
Tablica 14 Ukupni troškovi.....	29
Tablica 15 Prihod od prodaje	29
Tablica 16 Ukupni prihod	30
Tablica 18 Analiza graničnih prihoda i troškova na primjeru.....	32

Popis grafikona

Grafikon 1 Ukupni proizvod s povećanjem rada.....	5
Grafikon 2 Prosječni proizvod rada.....	7
Grafikon 3 Granični proizvod	9
Grafikon 4 Ukupni, prosječni i granični proizvod	9
Grafikon 5 Ukupni prihod u uvjetima savršene konkurencije	11
Grafikon 6 Ukupni prihod u uvjetima nesavršene konkurencije.....	12
Grafikon 7 Prosječni prihod	14
Grafikon 8 Prosječni prihod i granični prihod u uvjetima savršene konkurencije.....	15
Grafikon 9 Prosječni i granični troškovi u uvjetima nesavršene konkurencije.....	16
Grafikon 10 Fiksni troškovi i prosječni fiksni troškovi	17
Grafikon 11 Ukupni varijabilni troškovi.....	19
Grafikon 12 Prosječan proizvod po radniku.....	20
Grafikon 13 Prosječni varijabilni trošak	20

Grafikon 14 Fiksni i varijabilni troškovi.....	22
Grafikon 15 Prosječan ukupni trošak	24
Grafikon 16 Ukupni prihodi i ukupni troškovi prikazani grafički	30
Grafikon 17 Grafički prikaz ukupnog prihoda	31
Grafikon 18 Grafički prikaz optimizacije putem graničnih vrijednosti	33
Grafikon 19 ukupni prihod prošireni analizom graničnih vrijednost	33