

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Ekonomski fakultet u Osijeku
Sveučilišni prijediplomski studij Poslovna informatika

Željko Zvekić

**PROIZVODNA FUNKCIJA S JEDNIM VARIJABILNIM
FAKTOROM**

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Ekonomski fakultet u Osijeku
Sveučilišni prijediplomski studij Poslovna informatika

Željko Zvekić

**PROIZVODNA FUNKCIJA S JEDNIM VARIJABILNIM
FAKTOROM**

Završni rad

Kolegij: Mikroekonomika

JMBAG: 0010226811

e - mail: zeljkozvekić9@gmail.com

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Kristek

Osijek, 2022.

Josip Juraj Strossmayer University of Osijek
Faculty of Economics in Osijek
Undergraduate study, Business informatics

Željko Zvekić

PRODUCTION FUNCTION WITH ONE VARIABLE FACTOR

Final paper

Osijek, 2022.

IZJAVA
O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI,
PRAVU PRIJENOSA INTELEKTUALNOG VLASNIŠTVA,
SUGLASNOSTI ZA OBJAVU U INSTITUCIJSKIM REPOZITORIJIMA
I ISTOVJETNOSTI DIGITALNE I TISKANE VERZIJE RADA

1. Kojom izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je ZAVRŠNI
(navesti vrstu rada: završni / diplomski / specijalistički / doktorski) rad isključivo rezultat osobnoga rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu. Potvrđujem poštivanje nepovredivosti autorstva te točno citiranje radova drugih autora i referiranje na njih.
2. Kojom izjavljujem da je Ekonomski fakultet u Osijeku, bez naknade u vremenski i teritorijalno neograničenom opsegu, nositelj svih prava intelektualnoga vlasništva u odnosu na navedeni rad pod licencom *Creative Commons Imenovanje – Nekomercijalno – Dijeli pod istim uvjetima 3.0 Hrvatska*.
3. Kojom izjavljujem da sam suglasan/suglasna da se trajno pohrani i objavi moj rad u institucijskom digitalnom repozitoriju Ekonomskoga fakulteta u Osijeku, repozitoriju Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku te javno dostupnom repozitoriju Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (u skladu s odredbama Zakona o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju, NN br. 123/03, 198/03, 105/04, 174/04, 02/07, 46/07, 45/09, 63/11, 94/13, 139/13, 101/14, 60/15).
4. Izjavljujem da sam autor/autorica predanog rada i da je sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti istovjetan sa dovršenom tiskanom verzijom rada predanom u svrhu obrane istog.

Ime i prezime studenta/studentice: ŽELJKO ŽVEUČIĆ
JMBAG: 0010226311
OIB: 67079960229
e-mail za kontakt: zeljko@gmail.com
Naziv studija: POSLOVNA INFORMATIKA
Naslov rada: PROIZVODNA FUNKCIJA S JEDNIM VARIJABILNIM FAKTOROM
Mentor/mentorica rada: IVAN KRISTEK

U Osijeku, 27. lipnja 2022. godine

Potpis Željko Žveučić

Proizvodna funkcija s jednim varijabilnim faktorom

SAŽETAK

Proizvod je rezultat ljudskog rada namijenjen korištenju i zadovoljavanju ljudskih potreba. Razlikujemo proizvode za krajnju potrošnju i proizvode za korištenje u daljnjem proizvodnom procesu. Proizvodnja se definira kao proces pretvaranja proizvodnih inputa u finalni output uz svrhu zadovoljavanja ljudskih potreba i želja. Drugim riječima, proizvodnja je transformacija različitih resursa u konačni proizvod pri čemu se dodaje vrijednost. Jednadžba proizvodne funkcije govori kako proizvodna funkcija govori kako ona pokazuje najveću moguću količinu outputa, uz nepromijenjenu kombinaciju inputa, koju neko poduzeće može proizvesti. Razlikujemo ukupnu, prosječnu i graničnu vrijednost te će se svaka pojedinačno objasniti i prikazati na primjeru. Granični proizvod je dodatna proizvodnja dodavanjem jedne dodatne jedinice inputa, dok je prosječna proizvodnja po jedinici nekog inputa. Nadalje, u radu će se spominjati i četiri slojeva proizvodne funkcije te će se objasniti što su proporcionalna, progresivna i degresivna proizvodna funkcija. Zaključno će se govoriti o zakonu opadajućih prinosa i proizvodnoj funkciji s jednim varijabilnim faktorom te kako je važno pratiti granični i prosječni proizvod.

Ključne riječi: proizvod, proizvodnja, inputi, outputi, proizvodna funkcija

Proizvodna funkcija s jednim varijabilnim faktorom

ABSTRACT

A product is the result of human work intended for use and satisfaction of human needs. We distinguish products for final consumption and products for use in the further production process. Production is defined as the process of converting production inputs into final output with the purpose of satisfying human needs and desires. In other words, production is the transformation of various resources into a final product whereby value is added. The equation of the production function tells how the production function tells how it shows the largest amount of output, with an unchanged combination of inputs, that a firm can produce. We distinguish the total, average and threshold value, and each will be explained individually and shown with an example. Marginal product is the additional output by adding one additional unit of input, while average output is per unit of some input. Furthermore, the paper will mention the four layers of the production function and explain what the proportional, progressive and degressive production functions are. In conclusion, we will talk about the law of diminishing returns and the production function with one variable factor, and how important it is to monitor the marginal and average product.

Keywords: product, production, inputs, outputs, production function

SADRŽAJ

1. Uvod.....	1
2. Značenje proizvodnosti.....	2
3. Proizvodna funkcija	5
3.1 Izokvante	7
3.2 Prosječne, granične i ukupne vrijednosti.....	7
3.2.1 Ukupna vrijednost	8
3.2.2 Prosječna vrijednost	9
3.2.3 Granična vrijednost	10
3.3 Iskorištenost dodatne jedinice rada	12
3.4 Slojevi proizvodne funkcije	13
4. Primjena i analiza proizvodne funkcije	15
5. Proizvodnja s jednim varijabilnim faktorom	19
5.1 Zakon opadajućih prinosa	19
5.2 Proizvodnja s jednim varijabilnim faktorom na primjeru	19
6. Zaključak	23
Literatura.....	25
Popis tablica	26
Popis grafikona.....	26

1. Uvod

Odabrana tema za završni rad je Proizvodna funkcija s jednim varijabilnim faktorom, a cilj ovog rada je upoznati se s pojmom proizvoda, proizvodnosti te samom proizvodnom funkcijom. Proizvođači su izloženi mnogim rizicima, a jedan od tih je i zapošljavanje prevelikog broja ljudi koji rezultira smanjenjem finalne proizvodnje. Završni rad se sastoji od 4 glavna poglavlja, a to su: „Značenje proizvodnosti“, „Proizvodna funkcija“, „Primjena i analiza proizvodne funkcije“ i „Proizvodnja s jednim varijabilnim faktorom“. U prvom poglavlju pojasniti će se što je to proizvod te kako ih razvrstavamo. Pojasniti će se značenje proizvodnosti te što su inputi outputi u proizvodnom procesu. U sljedećem poglavlju spominjati će se proizvodna funkcija, koje je njeno značenje te što označavaju pojam izokvanti. Također, u ovome poglavlju kroz primjere objasniti će se ukupna, prosječna i granična vrijednost. Treće poglavlje obrazložiti će koja je primjena proizvodne funkcije, dok u posljednjem poglavlju će se objasniti zakon opadajućih prinosa i kroz primjere će se približiti proces proizvodnje s jednim varijabilnim faktorom. Na kraju rada se nalazi zaključak, a nakon njega se nalaze literatura, popis tablica i grafikona.

2. Značenje proizvodnosti

Prije definiranja proizvodnosti, potrebno je poznavati značenje proizvoda. Proizvod ili roba je rezultat ljudskog rada s određenim korisnim i upotrebnim svojstvima namijenjen prodaji na tržištu. Robom se trguje svakodnevno, a odvija se od proizvođača do potrošača bez obzira u kojem obliku. Svaki proizvod sadrži svoju vrijednost i služi svojoj svrsi te su zbog toga svi proizvodi korisni potrošaču koji ga koriste kako bi zadovoljili svoje potrebe i želje. Zbog toga, bitno je da je proizvod kvalitetno proizveden.

Proizvode možemo razlikovati, a najčešće se razvrstavaju u dvije kategorije:

- proizvodi za krajnju potrošnju (npr. hrana, piće, bicikli, video igrice i dr.); i
- proizvodi za daljnje korištenje u proizvodnom procesu (npr. strojevi, zgrade i dr.)

Razlog razvrstavanja proizvoda u ove dvije kategorije je svrha proizvoda. Neki proizvodi su potrebni za daljnji proizvodni proces, dok su neki finalni rezultat. Proizvode za krajnju potrošnju moguće je pronaći u maloprodajnim prodavaonicama, dok proizvodi koji služe za daljnje korištenje u proizvodnom procesu koriste se u slučaju obavljanja specifičnih poslova ili se tim proizvodima služi u obavljanju djelatnosti poduzeća.

U ekonomskoj literaturi značenje proizvodnosti prikazano je na različite načine. Rezultat toga je različito shvaćanje autora samog pojma, a sve potječe od područja njihovog djelovanja. Neki autori su upoznati više sa određenim aspektima od drugih te je ključno uvažavati svačija mišljenja. Na temelju toga, u nastavku rada spominjati će se nekoliko definicija proizvodnje.

Autori Mikac, Blažević (2007.) proizvodnju su definirali na sljedeći način: „Proizvodnja je prostorno i vremenski određen proces svjesnog djelovanja čovjeka temeljen na znanstvenim zakonitostima pri čemu dolazi do svrsishodne korelacije više čimbenika među kojima su elementarni predmet rada, sredstva za rad i ljudska aktivnost, a u cilju stvaranja materijalnih dobara i usluga.“ Značenje ove definicije naglašava vrijeme i prostor koji su veoma bitni čimbenici proizvodnog procesa. Također, naglašeno je kako su predmet rada, sredstva za rad i ljudska aktivnost jednako bitni čimbenici kako bi se ostvario željeni proizvod.

„Proizvodnja je svrsishodna ljudska djelatnost sastavljena od niza proizvodnih aktivnosti u kojoj se inputi odnosno faktori proizvodnje kroz programirani tehnološki proces transformiraju u outpute odnosno u proizvode i usluge pogodne i prikladne za zadovoljavanje

potreba potrošača.“ Iz prikazane definicije, autor Santini (2004.) naglašava kako je cilj proizvodnje kreirati određeni proizvod koji će moći zadovoljiti sve potrebe krajnjih potrošača. Za realizaciju toga proizvoda, koriste se razne sirovine i materijali te uz pomoć ljudske aktivnosti doći će se do završnog oblikovanja proizvoda i njegovog plasmana na tržište.

Autori Žugaj, Šehonović i Cingula (2004.) značenje proizvodnje definiraju: „Proizvodnja je proces u kojem dolazi do svjesnog i svrsishodnog spajanja triju elementarnih komponenata (predmeti rada, sredstava za rad i ljudski rad, a u sustavskom smislu materije, energije i informacije), radi stvaranja materijalnih dobara i usluga potrebnih društvu.“ Iz ove definicije može se zaključiti kako su, također, za stvaranje proizvoda i usluga, potrebni predmet rada, sredstva za rad i ljudska snaga te uz energiju i informacije može se doći do proizvoda koji zadovoljavaju potrebe pojedinaca i društva u cijelosti.

Zaključno, proizvodnja se može definirati kao proces kroz koji neko poduzeće pretvara inpute u outpute. Ono je proces stvaranja dobara i usluga u svrhu zadovoljenja ljudskih potreba i želja. Drugim riječima, proizvodnja je transformacija inputa u output pri čemu se dodaje vrijednost.

Sa ekonomskog stajališta, inputi su svi elementi koji predstavljaju udio u razradi proizvoda, dok su outputima smatraju konačni rezultat. Drugi naziv za inpute, odnosno sirovine i materijale, jest resursi. Jednostavan primjer proizvodnje mogla bi biti proizvodnja kolača. Jaja, brašno, voda, sol, šećer i dr. su inputi dok je output sami kolač.

Iznimno je važno da proizvodni inputi (sirovine i materijali) budu što kvalitetniji i dovoljnim količinama zastupljeni kako bi se proizveo najbolji oblik proizvoda (output).

Veza između inputa i outputa robe ovisi o stanju tehnologije jer se uz pomoć napredne tehnologije može proizvesti veća količina istog inputa ili istog outputa bez obzira koliki bio broj inputa.

Kada se govori o proizvodnoj funkciji, potrebno je biti upoznat sa osnovama. Razlikujemo tri koncepta vezana uz proizvodnu funkciju:

- 1) Kratkoročno i dugoročno razdoblje
- 2) Fiksni i varijabilni čimbenici
- 3) Razina proizvodnje i opseg proizvodnje

Kratkoročnom razdoblju odnosi se na vremensko razdoblje u kojemu poduzeće nema dovoljno vremena kako bi povećao obujam proizvodnje. U ovome razdoblju poduzeće može povećati razinu proizvodnje tako da poveća količinu promjenjivog čimbenika ili pak povećanjem intenzivnosti korištenja postojećeg fiksnog čimbenika. Također, dugoročno razdoblje se odnosi na vremensko razdoblje, ali u ovome razdoblju poduzeće može povećati veličinu outputa povećanjem količine svih ulaznih čimbenika istovremeno i u istom omjeru. Kao što se može primijetiti, razlika između fiksnih i varijabilnih čimbenika relevantna je samo u kratkoročju, dok ista ta razlika nestaje u dugoročju.

Sljedeće je bitno razlikovati fiksne i varijabilne čimbenike ili faktore. Fiksni su oni čimbenici proizvodnje čija količina ne može utjecati na promjenu razine proizvodnje outputa. Na primjer, količina zemlje za poljoprivredu, strojevi, traktori i dr. ne mogu utjecati na promjenu razine proizvodnje u kratkoročju. S druge strane, varijabilni čimbenici su oni čimbenici proizvodnje čija količina može utjecati na promjenu razine proizvodnje outputa. Na primjer, lako se može povećati ili smanjiti broj zaposlenika kako bi se proizvodnja povećala ili smanjila.

Posljednje se treba razlikovati razlika između razina i opsega proizvodnje. Na povećanje razine proizvodnje poduzeće može utjecati tako da poveća količinu jednog čimbenika proizvodnje gdje je količina ostalih čimbenika proizvodnje konstantna. U slučaju kada poduzeće želi povećati obujam proizvodnje, tada će poduzeće povećati proizvodnju povećavajući količinu svih čimbenika proizvodnje istovremeno i u istom omjeru.

3. Proizvodna funkcija

U ekonomiji, proizvodna funkcija odnosi se na fizički odnos između inputa i outputa prema danoj tehnologiji. Pod pojmom tehnologije podrazumijevamo razvoj i primjenu određenih alata i strojeva uz materijale i određene postupke kako bi se proizveo neki proizvod ili kako bi se obavila neka aktivnost. Također, proizvodna funkcija se može opisati i kao matematički funkcionalni i tehnički odnos između inputa i outputa proizvodnje takav da u zadanom vremenskom razdoblju i uz određenu kombinaciju čimbenika inputa i tehnologije može se proizvesti maksimalan mogući učinak. Primjeri su zemljište, radni kapital i poduzetništvo.

Proizvodna funkcija ima određeni cilj. „Zadatak proizvodne funkcije je da u skladu sa strukturom i karakterom osnovnih sredstava, te kvalifikacijskom strukturom zaposlenih i njihovim radnim iskustvom, proizvodi određene vrste proizvoda u određenoj količini i kvaliteti, u određeno vrijeme i s najmanjim troškovima“ (Žugaj, Šehanović i Cingula, 2004; 278, 279). Zadatak proizvodne funkcije će se smatrati izvršenim ako se nabave potrebne sirovine i potrebna oprema za proizvodnju. Samim time, dolazi do mogućnosti pokretanja proizvodnje koja pokreće prodaju. Ta prodaja naposljetku organizaciji donosi zaradu.

U slučaju kada postoje dva čimbenika inputa, rad i kapital, proizvodna funkcija može se zapisati kao:

$$Q_x = f(L, K)$$

U ovoj formuli Q_x označava količinu outputa x , dok f označava samu funkciju. L označava rad (eng. labour), a K (eng. capital). Ova formula govori kako količina outputa ovisi o jedinici rada na kapitalu korištenom u proizvodnji.

Neki autori formulu proizvodne funkcije zapisuju i na druge načine, jedan od tih je i sljedeći koji sadrži jednako značenje kao i prethodna formula:

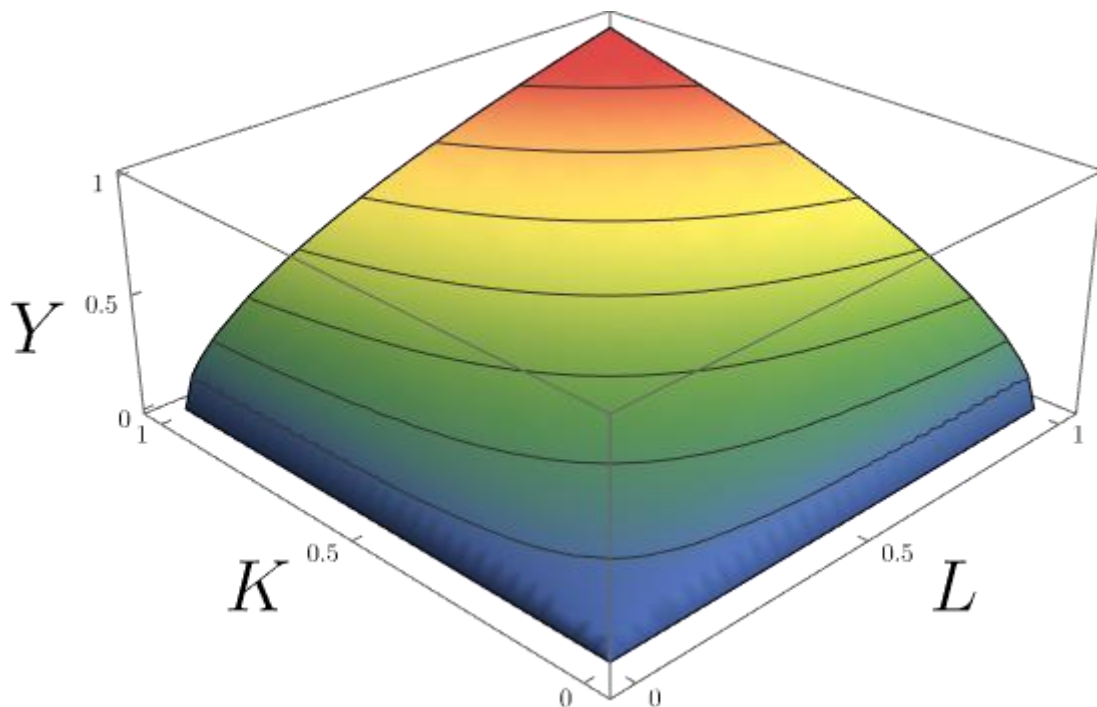
$$q = F(K, L)$$

Zaključuje se kako proizvodnu funkciju treba razmotriti s obzirom na određeno vremensko razdoblje, odnosno kratko i dugo te kako je proizvodna funkcija određena stanjem tehnologije korištene. Prikazana jednadžba govori kako proizvodna funkcija pokazuje najveću moguću količinu proizvoda (outputa) koju neko poduzeće može proizvesti uz nepromijenjenu kombinaciju inputa.

Iznimno je važno da svi resursi (sirovine i materijali) mogu biti spojivi kako ne bi došlo do manje kvalitetnijeg proizvoda, odnosno inputi bi trebali biti međusobno ovisni.

Kao što je u radu ranije spominjano, uz proizvodnu funkciju veže se dugoročno i kratkoročno razdoblje. Na gore navedenom primjeru proizvodne funkcije, u slučaju kratkoročnog razdoblja, rad (L) smatra se kao varijabilni čimbenik koji se može mijenjati kako bi utjecao na razinu konačnog outputa. Drugi čimbenik je kapital (K) koji je fiksni čimbenik te se on ne može mijenjati. Suprotno od kratkoročnog razdoblja, nalazi se dugoročno razdoblje koji nam govori kako na ovome primjeru, i rad (L), i kapital (K) su varijabilni čimbenici koji se mogu mijenjati ovisno o činjenici povećanja ili smanjenja proizvodnih čimbenika.

Grafikon 1. Proizvodna funkcija



Izvor: Fuleky, P. (2006). *Anatomy of a Cobb-Douglas Type Production/Utility Function in Three Dimensions*. Mimeo, University of Washington

Na grafikonu je vidljivo kako se rad i kapital proporcionalnu povećavaju do jedne razine od koje više nije isplativo povećavati inpute. Kada se dođe do te točke, potrebno je promotriti sve aspekte poslovanja te u slučaju pronađenih grešaka, popraviti ih. Ako se ispostavi kako da ne postoje greške, preporuča se povećanje proizvodnog kapaciteta.

3.1 Izokvante

Izokvante se mogu objasniti kao „krivulja koja povezuje sve moguće kombinacije inputa za koje je razina proizvodnje jednaka.“ (Pindyck, R.S., Rubinfeld, D.L. 2005:179) Kombinacija određenih proizvodnih čimbenika koji se koriste u proizvodnom procesu prikazuje se na grafičkom prikazu. Izradom tih grafova, poduzeću se prikazuje koliko je efikasna proizvodnja te se ukazuje na, ako postoje, moguća poboljšanja. Također, u analiziranju rezultata poduzeću je na raspolaganju i izmjena i kombinacija proizvodnih čimbenika (inputa). Neki od razloga zašto bi to neko poduzeće željelo učiniti su: usporedba stanja sa postojećim ili uvođenje neke dodatne kombinacije resursa.

3.2 Prosječne, granične i ukupne vrijednosti

Kako se u ovome radu razmatra proizvodna funkcija, dolazi i do važnosti za razlikovanjem prosječne, granične i ukupne vrijednosti te shvaćanja njihove međusobne povezanosti. „*Granični proizvod* definira se kao dodatna proizvodnja (output) koja nastaje dodavanjem jedne dodatne jedinice inputa, a *prosječni proizvod* proizvodnju po jedinici nekog inputa.“ (Pindyck, R.S., Rubinfeld, D.L. 2005:182) Prosječni proizvod rada definiramo kao produktivnost radne snage nekog poduzeća dobivenu kroz količinu proizvodnje koju svaki zaposlenik proizvede u prosjeku.

O količini kapitala koji se upotrebljava u proizvodnom procesu ovisan je graničan proizvod. Ukupnim vrijednostima, odnosno proizvodima, smatramo količinu nekog outputa pri nekoj pri nekoj razini korištenja inputa. Poduzeća mogu proizvoditi više outputa ili samo jedan output te se to odnosi na ukupnu količinu samo jednog outputa bez obzira na broj različitih outputa koje poduzeće proizvodi. Prosječna, granična i ukupna vrijednost znatno doprinose radu u proizvodnom procesu.

Prosječna vrijednost dobiva se stavljanjem outputa u odnos sa inputima rada, dok se granična vrijednost dobiva stavljanjem promjene outputa u odnos sa promjenom inputa rada.

3.2.1 Ukupna vrijednost

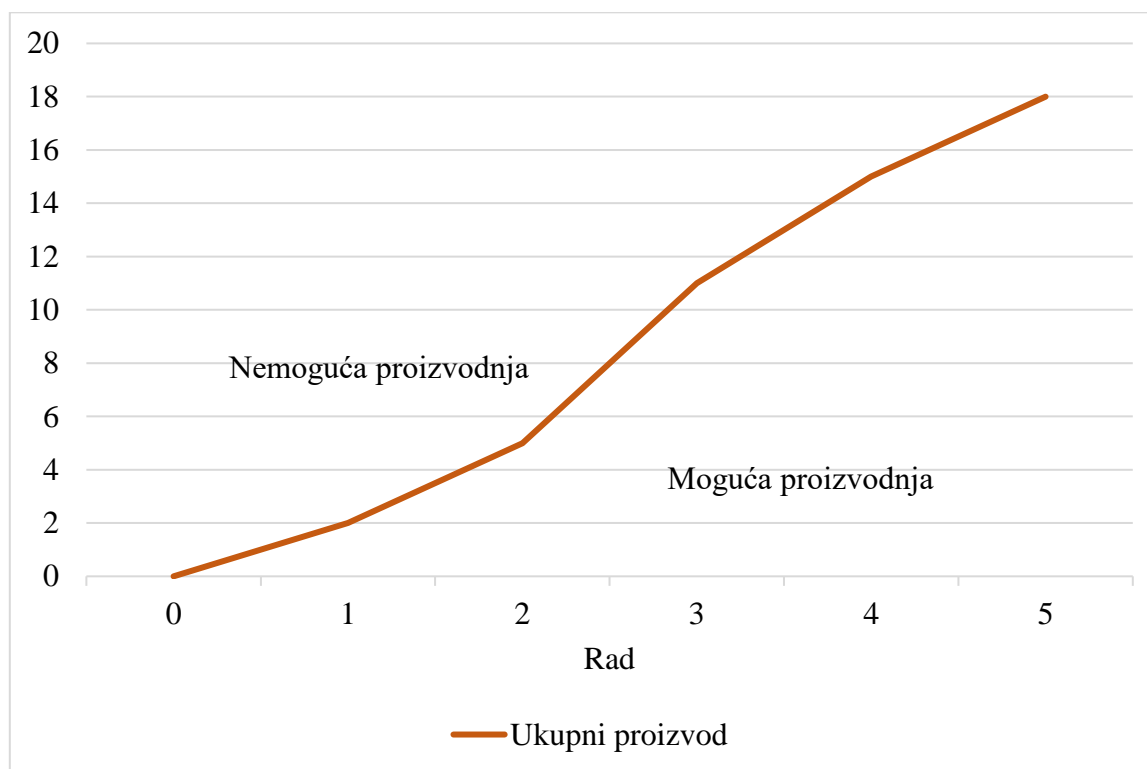
Ukupna vrijednost je sumirana proizvodnja nekog proizvoda te ona pokazuje kolika će biti ukupna proizvodnja uz određene uvjete, odnosno, uz određeni unos resursa (npr. rad). Krivulja proizvodnog faktora će rasti u slučaju kada se povećava unos nekog proizvodnog čimbenici uz pretpostavku kako će svi ostali proizvodni čimbenici ostati nepromijenjeni.

Tablica 1. Ukupni proizvod u slučaju povećanja rada

Jedinica rada	Ukupni proizvod (vrijednost)
0	0
1	2
2	5
3	11
4	15
5	18

Izvor: izrada autora

Grafikon 2. Ukupni proizvod u slučaju povećanja rada



Izvor: izrada autora

U tablici i u grafikonu iznad može se zaključiti kako s dodatkom dodatne jedinice rada, ukupni proizvod raste. Moguća i nemoguća proizvodnja razdvojene su sa linija ukupnog proizvoda po jedinicama rada. Sva proizvodnja koja se nalazi iznad linije ukupnog proizvoda smatra se nemogućom proizvodnjom, odnosno proizvodnja iznad linije nije moguća ukoliko se dani uvjeti ne promjene te se smatra neostvarivom. Suprotno, sva proizvodnja koja se nalazi ispod linije ukupnog proizvoda smatra se mogućom proizvodnjom, ali ona nije optimalna te označava kako proizvodni čimbenici (inputi) nisu posloženi na najbolji mogući način. Potrebno je poboljšati njihovu iskorištenost.

3.2.2 Prosječna vrijednost

Prosječnom vrijednošću smatramo ukupnu vrijednost po jedinici proizvodnog čimbenika. Računa se tako da u omjer stavimo ukupni proizvod i količinu rada.

$$\text{Prosječni proizvod rada} = \frac{\text{Ukupni proizvod}}{\text{Količina rda}}$$

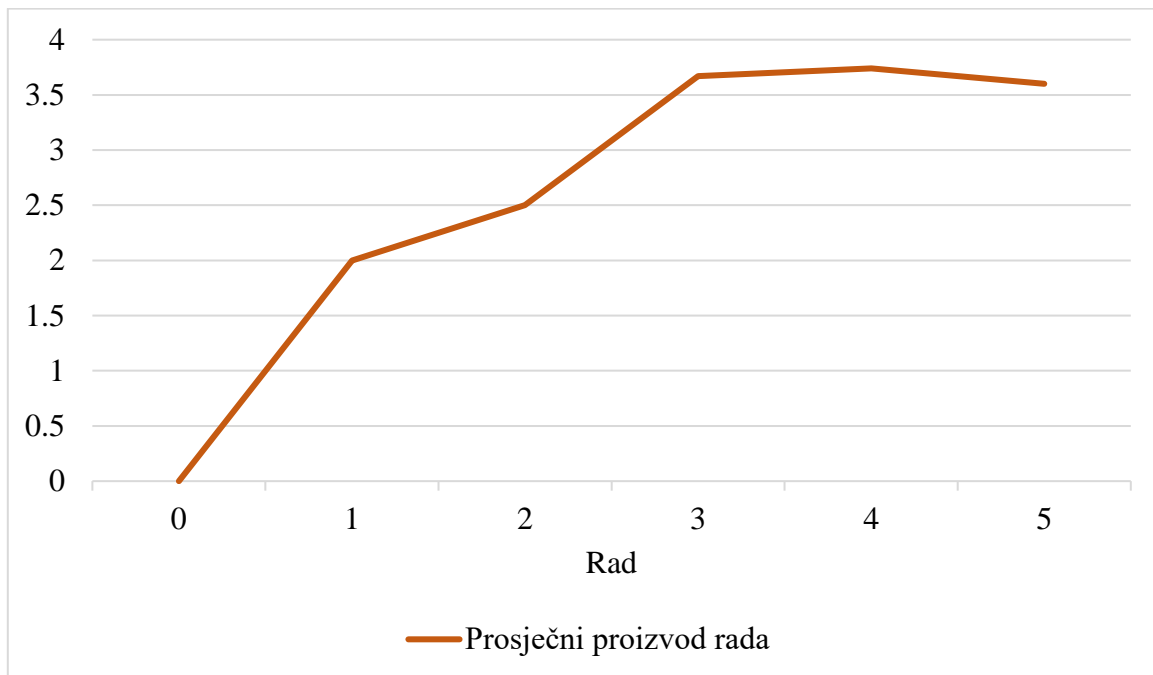
Prosječni proizvod se izračunava prema primjeru iz tablice 1, što je prikazano u sljedećoj tablici:

Tablica 2. Prosječni proizvod

Jedinica rada	Ukupni proizvod (vrijednost)	Prosječni proizvod
0	0	0
1	2	2
2	5	2,5
3	11	3,67
4	15	3,74
5	18	3,6

Izvor: izrada autora

Grafikon 3. Prosječni proizvod rada



Izvor: izrada autora

Kao što je vidljivo na grafu i u tablici, prosječni proizvod po jedinici rada rasta je do 4 jedinice rada, zatim je počeo opadati iako su se dodavale jedinice koje su rezultirale povećanjem ukupne proizvodnje. Svaki proces rasta i pada proizvodnje s povećanjem jedinica rada sličan ovome primjeru proizlazi iz toga što se s povećanjem jedinica rada (zaposlenika), ostvaruje povećanje specijalizacije u proizvodnji te rasta produktivnosti. Kasnije se ostvaruje smanjenje produktivnosti zbog pojavljivanja nedostataka materijala ili zbog praznog hoda koji se pojavljuje u situacijama kada zaposlenici nemaju što obavljati jer su radne stanice popunjene. Uzimajući za primjer lanac kozmetičke industrije, ako postoji više radnih stanica, poput one za pakiranje paleta sjenila za oči, stavljanje zaštitne plastike, zatvaranje paketa i dr., produktivnost će rasti s povećanjem radnika sve dok sve stanice nemaju dovoljnu količinu. Zatim, prosječni proizvod po jedinici radnika opada zbog zapošljavanja dodatnog zaposlenika. Razlog tomu je što taj dodatni zaposlenik nema što raditi ako su sve stanice zauzete i prosječni proizvod opada.

3.2.3 Granična vrijednost

Granični proizvod je proizvod dodatne jedinice proizvodnog čimbenika, u ovome slučaju je to rada. Granični proizvod se računa kao promjena ukupne vrijednosti u omjeru s promjenom proizvodnog čimbenika:

$$\text{Granični proizvod} = \frac{\Delta \text{ Ukupni proizvod}}{\Delta \text{ Proizvodni čimbenik}}$$

U ovome primjeru, proizvodni čimbenik je rad te se zbog toga funkcija zapisuje kao:

$$\text{Granični proizvod rada} = \frac{\Delta \text{ Ukupni proizvod}}{\Delta \text{ Rad}}$$

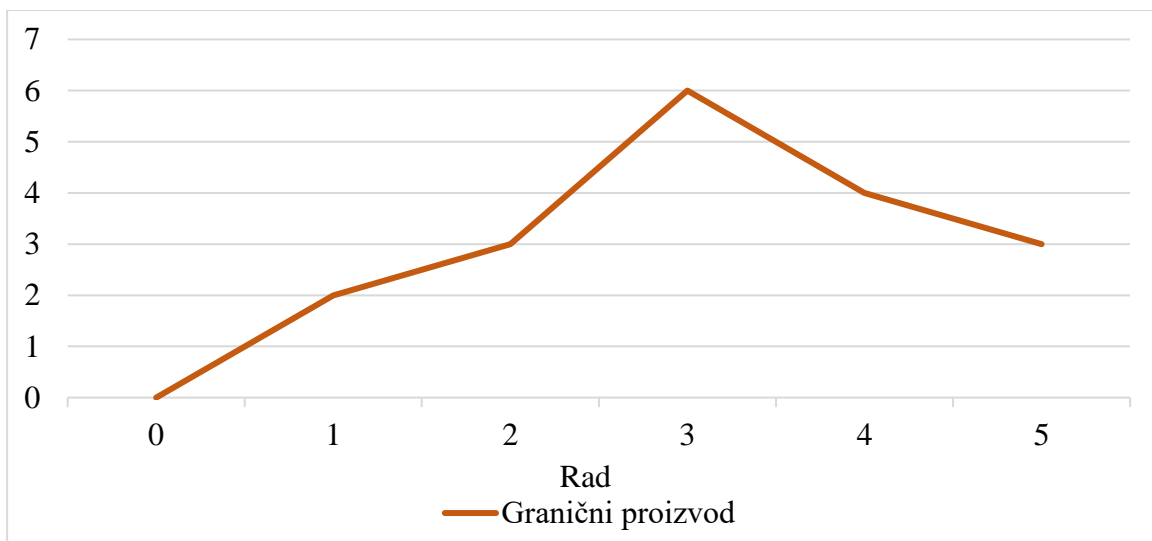
Uzimajući prethodni primjer, granični proizvod za poduzeće izgledao bi:

Tablica 3. Granični proizvod

Jedinica rada	Ukupni proizvod (vrijednost)	Prosječni proizvod	Granični proizvod
0	0	0	-
1	2	2	2
2	5	2,5	3
3	11	3,67	6
4	15	3,74	4
5	18	3,6	3

Izvor: izrada autora

Kada to postavimo u grafikon:



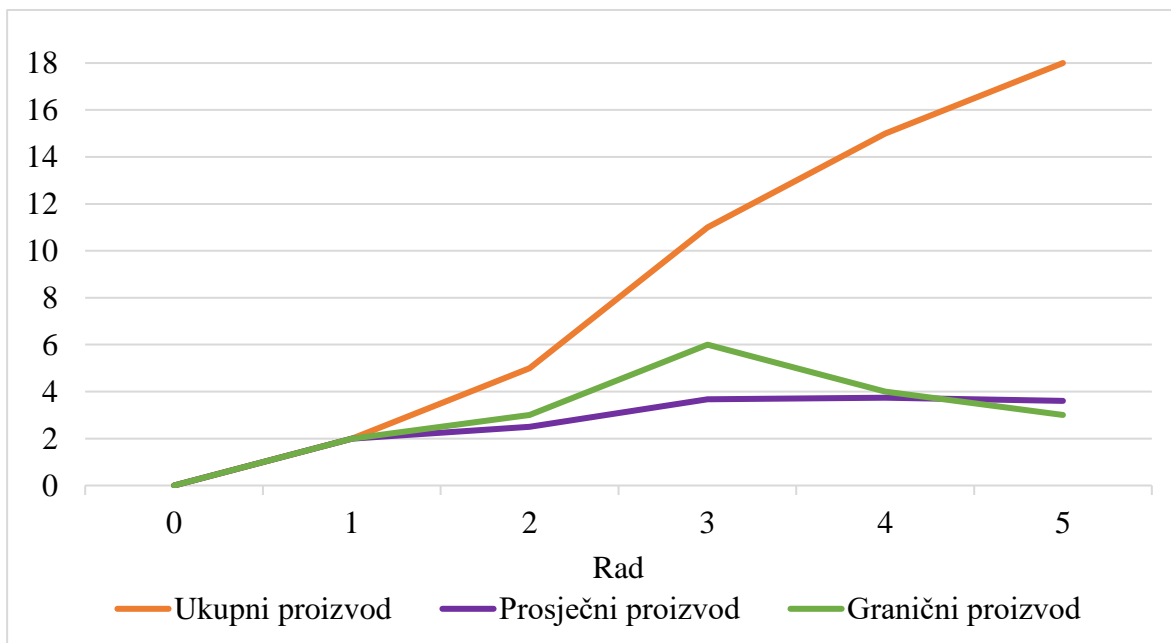
Grafikon 4. Granični proizvod

Izvor: izrada autora

3.3 Iskorištenost dodatne jedinice rada

Kada se poduzeće želi uvjeriti je li u potpunosti iskorišten potencijal, sagledava prosječni, granični i ukupni proizvod. Svako poduzeće želi izbjeći neiskorištenost dodatne jedinice kako ne bi gubili uloženi novac. Sljedeći graf prikazuje prosječni, granični i ukupni proizvod na jednome prikazu temeljen na podacima iz gore navedenog primjera:

Grafikon 5. Ukupni, prosječni i granični proizvod



Izvor: izrada autora

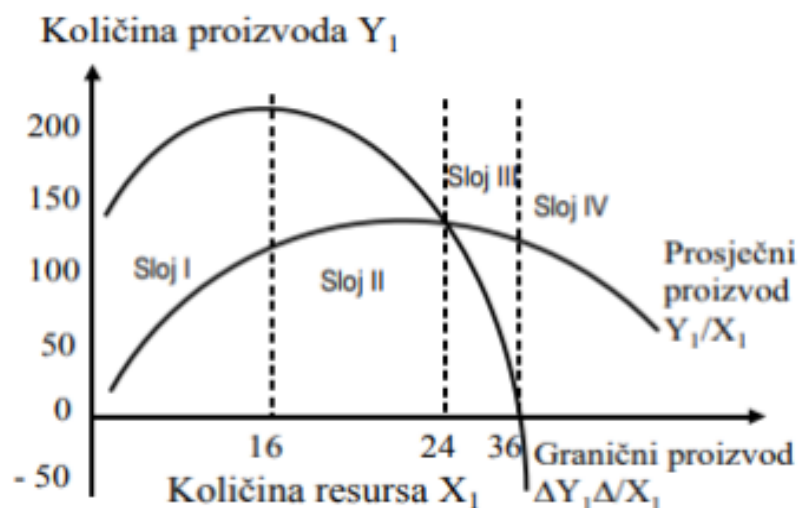
Promatrajući posljednji grafik, jasno je vidljivo kako granični i prosječni proizvod počinju opadati bez obzira na konstantni rast ukupnog proizvoda. Situacija prikazana na grafu označava kako što veća količina uložene jedinice rada ne garantira što veću proizvodnju. Uzimajući ponovno za primjer lanac kozmetičke industrije. Dodatna jedinica rada neće biti maksimalno iskorištena iako ona sa sobom nosi povećanje ukupne proizvodnje. Dodatni radnik nema potrebu za obavljanjem posla u situacijama kada su sve radne stanice popunjene te on posao tek obavlja kada se oslobodi radna stanica. To se događa kada je neki drugi radnik na pauzi ili je bio spriječen u obavljanju posla na radnoj stanici. U tome slučaju, dodatni radnik (jedinica) može iskoristiti svoj potencijal. Zbog nepotpunog iskorištenja potencijala, prosječni i granični proizvod opadaju bez obzira na to što se može povećati ukupan proizvod.

3.4 Slojevi proizvodne funkcije

Slojevi proizvodne funkcije su određene razine ili faze koje označavaju promjene prosječnih i graničnih vrijednosti. Oni se mogu analizirati sa stajališta stupnja elastičnosti proizvodnje. Pojam elastičnosti često se koristi u suvremenoj tržišnoj ekonomiji kako bi se opisao odnos prodavača i kupca, odnosno proizvođača i potrošača. Elastičnost je jedan od pokazatelja uspješnosti poslovanja poduzeća, a ono je omjer relativne promjene vrijednosti ukupnog proizvoda i relativne promjene količine fleksibilnog (promjenjivog) inputa. Drugim riječima, elastičnost proizvodnje je mjera reagiranja količine ukupnog prinosa (fizičkog proizvoda) na promjenu količine promjenljivog resursa (Karić, 2009: 193)

Slojevi se prikazuju u granicama količina inputa (resursa) u odnosu na količinu proizvoda. Prvi sloj započinje na razini promjenjivog resursa pri kojoj je granični proizvod dosegao maksimum. (Grafikon 2.) Sljedeći, drugi, sloj nastavlja se na prvi te završava na razini inputa na kojoj prosječni prinos ostaje maksimalan. Nadalje, treći sloj se proteže od razine ulaganja fleksibilnog (promjenjivog) inputa gdje je prosječni prinos maksimalan i jednak graničnom prinosu. Posljednji sloj prepoznatljiv je po smanjenju ukupne vrijednosti te je granični prinos negativan.

Grafikon 6. Slojevi proizvodnje i prosječni i granični proizvod



Izvor: Karić, 2009:191

Na grafikonu iznad može se vidjeti kako granični proizvod započinje na višoj vrijednosti od prosječnog proizvoda te kako prolazi kroz slojeve, dolazi do bržeg pada nego prosječna vrijednost. Razlog tomu, kao što je već ranije pojašnjeno, je taj što beskonačno povećanje resursa (inputa) ne rezultira sa beskonačnim povećanjem proizvoda (outputa). Postoji granica do koje će količina proizvoda rasti te isto vrijedi i za granični i prosječni proizvod.

4. Primjena i analiza proizvodne funkcije

Proizvodna funkcija se može izraziti u 3 oblika:

- u obliku tablice,
- algebarski izraz i
- grafikon

Sljedeći grafički prikaz prikazuje 3 opća oblika proizvodne funkcije.

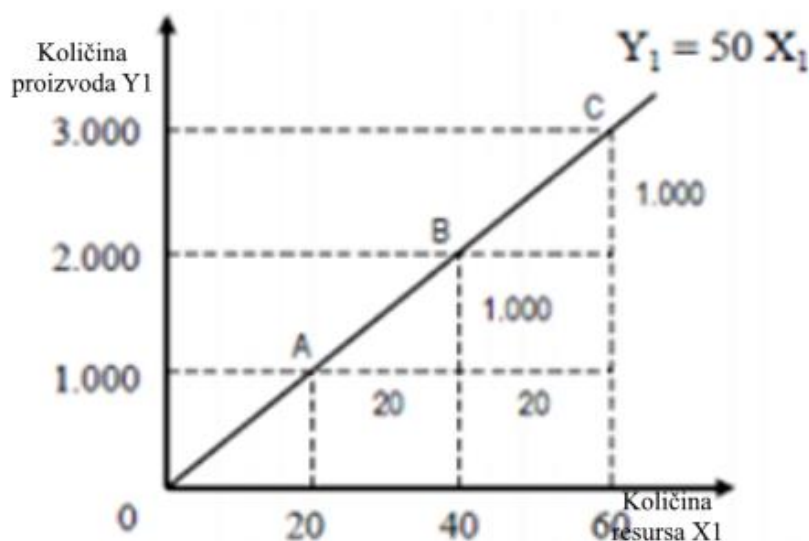
Grafikon 7. Opći oblik proizvodne funkcije



Izvor: Karić, 2009: 183-190

Proporcionalna proizvodna funkcija rezultat je konstantnog odnosa između količine prinosa i količine jednog fleksibilnog (promjenjivog) resursa u kojem količina prinosa raste za isti iznos svaki put kada se doda jedna jedinica inputa. Drugi naziv za proporcionalnu proizvodnu funkciju jest linearna proizvodna funkcija te grafički ima isti nagib. Upravo to predstavlja geometrijski pojam koji označava koeficijent smjera, u cijelom rasponu ulaganja fleksibilnog inputa.

Grafikon 8. Proporcionalna proizvodna funkcija s jednim promjenjivim inputom



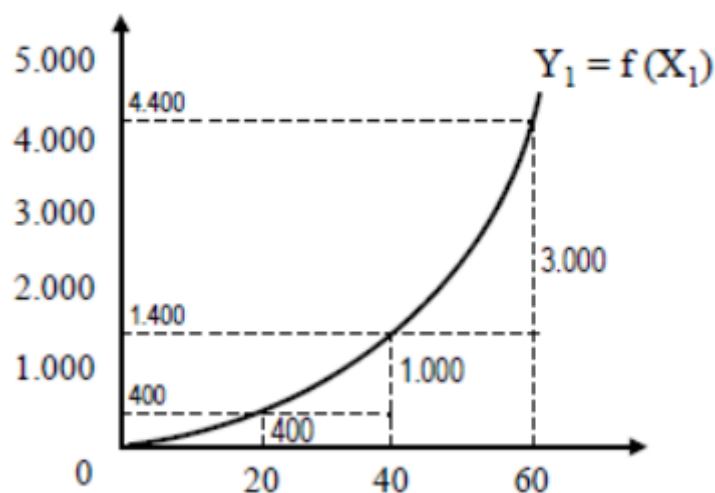
Izvor: Karić, 2009: 118.

Analizom grafičkom prikaza primjećuje se kako je promjena $X_1 = 20$, a promjena $Y_1 = 1000$, prema tome je nagib 50. Nagib se računa kao količnik okomitog razmaka i vodoravnog razmaka te je u ovome primjeru to $1000/20$. U ovome primjeru linija proizvodne funkcije je linearna, dobiveni nagib od 50 je jednak bez obzira na dio krivulje te se Y_1 povećava za 50 jedinica za svaku jedinicu povećanja X_1 . Drugim riječima, koeficijent nagiba iznosi 50 u slučaju kada se X_1 poveća za 2000 jedinica koji rezultira povećanjem Y_1 za 40 jedinica. Savršena linija proizvodne funkcije rijetko je ostvariva u praksi te je moguće da se pojavi u određenim uvjetima i u nekim djelatnostima.

Drugi oblik proizvodne funkcije je rastuća ili progresivna proizvodna funkcija koja poprima oblik krivulje konveksno zakrivljenu u odnosu na apscisu ili X-os. Nagib ove krivulje postaje strmiji, okomitiji, što je veći prtok inputa.

Grafikon 9. Prikaz progresivne proizvodne funkcije s jednim promjenjivim inputom

Količina proizvoda Y_1



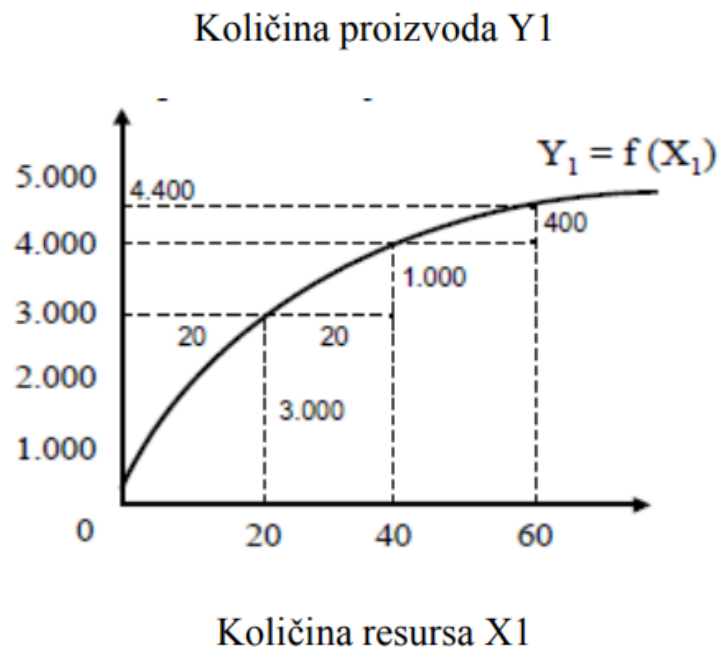
Količina resursa X_1

Izvor: Karić, 2009: 189

Progresivna proizvodna funkcija u praksi se ne pojavljuje često nego većinom pojavljuje na niskim razinama ulaganja resursa, odnosno u početnoj fazi utroška fleksibilnog resursa. Rast prinos ostvaruje se zbog manje potrošnje fleksibilnog resursa, primjene boljih tehnologija, povećanja racionalnosti procesa proizvodnje, korištenja većih kapaciteta i dr.

Treći oblik proizvodne funkcije je opadajuća ili degresivna funkcija koja se pojavljuje kao rastuća funkcija koja tijekom vremena usporava sa rastom, opada, odnosno ima oblik krivulje s konkavnom zakrivljenošću u odnosu na apscisu ili X-os. Ona predstavlja izraz opadajućeg odnosa količine inputa i količine jednog fleksibilnog resursa. Nagib krivulje smanjuje se kako se Y_1 smanjuje za svaki dan dodani resurs. Sljedećim grafičkim prikazom prikazana je degresivna proizvodna funkcija.

Grafikon 10. Prikaz degresivne proizvodne funkcije s jednim promjenjivim inputom



Izvor: Karić, 2009: 189

Situacije kada se degresivna proizvodna funkcija pojavljuje najčešće je poljoprivredna proizvodnja gdje se s porastom potrošnje nekog proizvodnog čimbenika, granični prinos smanji ili postaje negativan. Negativni prinosi se pojavljuju i u četvrtom sloju proizvodne funkcije kada proizvođač povećava količinu fleksibilnog resursa, a ukupni prinos u apsolutnom iznosu opada. Kod progresivne proizvodne funkcije ukupni prinos se povećava po rastućoj stopi tako da granični prinos raste (Karić, 2009: 189).

5. Proizvodnja s jednim varijabilnim faktorom

Proizvodnja s jednim varijabilnim faktorom podrazumijeva upotrebu samo jednog čimbenika proizvodnje. Kao što je ranije spomenuto, kapital i rad predstavljaju jedne od važnijih čimbenika proizvodnje. Važno je navesti kako je bitna povezanost svih čimbenika proizvodnje. Proizvodnja s jednim varijabilnim faktorom najčešće se prikazuje pomoću grafičkog prikaza temeljenih na podacima koji su poznati ili podacima koji se mogu pretpostaviti kako će se pojaviti u proizvodnom procesu. Proizvodnja s jednim promjenjivim čimbenikom poduzeću pomaže pri dodatnoj proizvodnji koja nastaje dodatnim povećanjem inputa, odnosno pri usporedbi granične veličine troškova i koristi.

5.1 Zakon opadajućih prinosa

Zakon opadajućih prinosa označava kako će se sve više smanjivati dodatni ukupni proizvod kod dodavanja dodatne jedinice jednog proizvodnog čimbenika dok drugi proizvodne čimbenike ostaju neizmijenjeni. Drugim riječima, zakon opadajućih prinosa govori kako granični prihod svakog inputa će opadati sa povećanjem količine tog istog inputa dok su drugi inputi fiksirani. Također, zakon opadajućih prinosa može se definirati kao smanjenje dodatnog inputa svakim dodatnim povećanjem nekog inputa uz nepromijenjenost ostalih inputa.

Pretpostavimo kako postoje jedni lokalni bazeni koji uz usluge bazena sadržavaju i restoran. Stručne poslove oko brige za rad restorana tijekom cijele godine obavlja stalno zaposlena radna snaga. Međutim, kada dođe ljetno vrijeme, bazeni su opet u funkciji te je vlasnik u potrazi za sezonskom radnom snagom koja će se brinuti za prodaju ulaznica, čišćenje bazena i drugo.

Pretpostavimo kako bazeni imaju visoku posjećenost te je broj potrebnih zaposlenika dosta veći tijekom vikenda i lijepih dana, ali ako se zaposli previše zaposlenika, dolazi do viška zaposlenih u slučaju kada je npr. kišni dan.

5.2 Proizvodnja s jednim varijabilnim faktorom na primjeru

U nastavku rada grafički će biti prikazani podaci iz tablice 4. kako bi se što bolje prikazala proizvodnja s jednim promjenjivim čimbenikom.

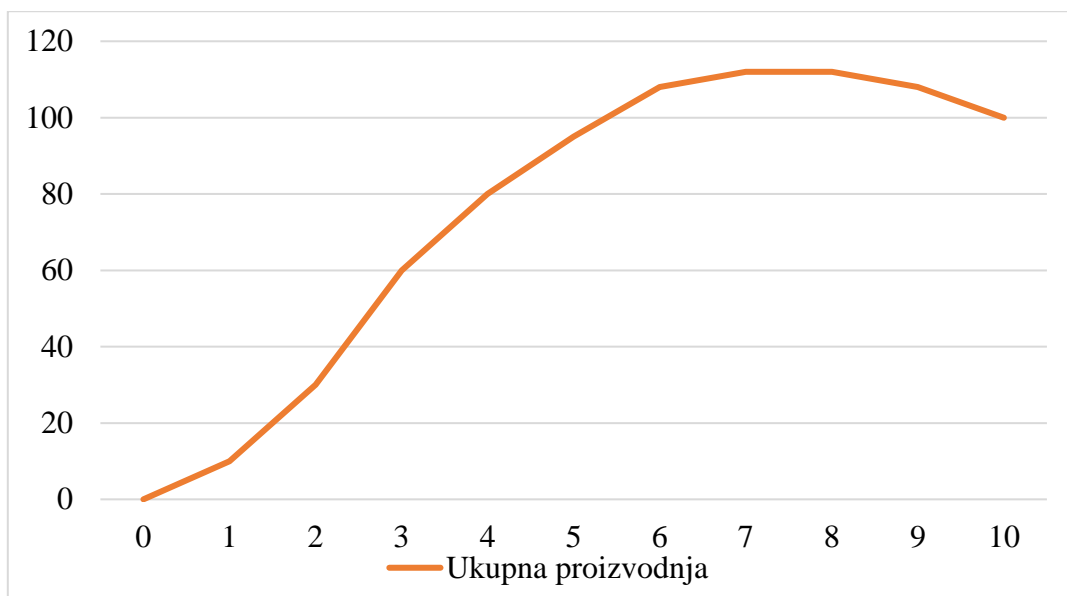
Tablica 4. Proizvodnja s jednim varijabilnim faktorom

Količina rada	Količina kapitala	Ukupna proizvodnja	Prosječni proizvod	Granični proizvod
(L)	(X)	(Q)	(Q / L)	($\Delta Q / \Delta L$)
0	10	0	-	-
1	10	10	10	10
2	10	30	15	20
3	10	60	20	30
4	10	80	20	20
5	10	95	19	15
6	10	108	18	13
7	10	112	16	4
8	10	112	14	0
9	10	108	12	-4
10	10	100	10	-8

Izvor: izrada autora prema Pinyek, R.S.; Rubinfeld, D.L. (2005.) *Mikroekonomika*.

Mate. Zagreb

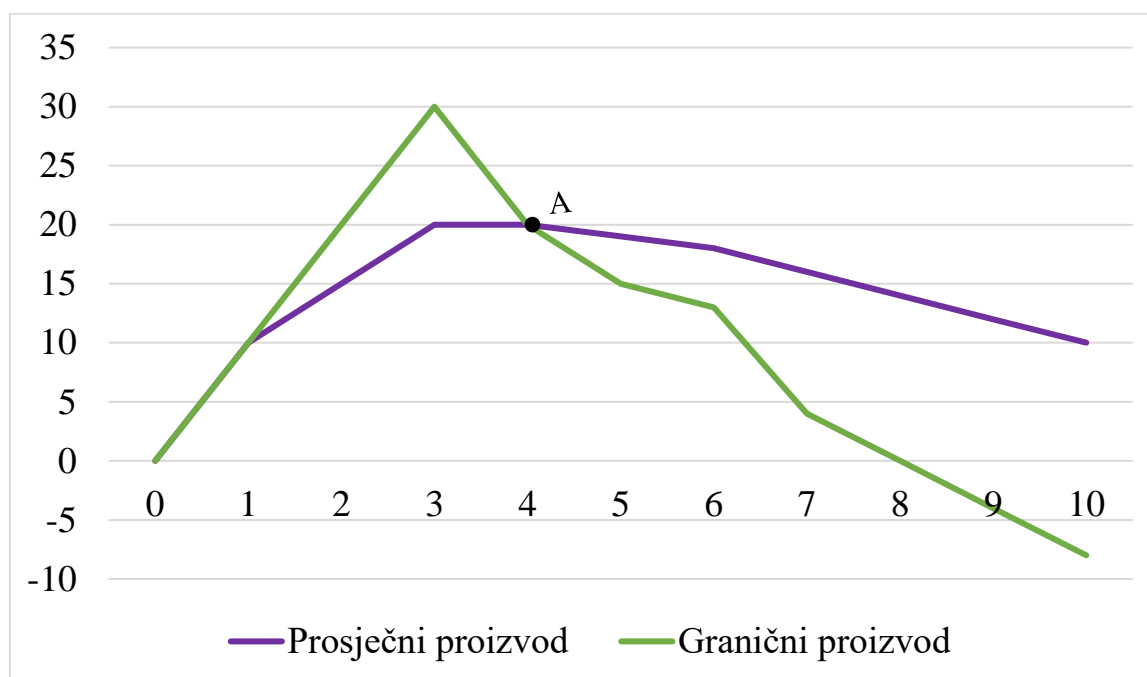
Grafikon 11. Ukupni proizvod (Proizvodnja s jednim varijabilnim faktorom)



Izvor: izrada autora prema Pinyek, R.S.; Rubinfeld, D.L. (2005.) *Mikroekonomika*.

Mate. Zagreb

Grafikon 12. Prosječni i granični proizvod (Proizvodnja s jednim varijabilnim faktorom)



Izvor: izrada autora prema Pinyek, R.S.; Rubinfeld, D.L. (2005.) *Mikroekonomika*.

Mate. Zagreb

Za ovaj primjer pretpostavlja se kako je kapital fiksna (nepromjenjiva) varijabla, a rad varijabilan (promjenjiv). Proizvodnja se može povećati samo ako se povećava čimbenik rada. Prilikom promatranja tablice 4. primjećujemo kako prva tri stupca prikazuju mjesečnu razinu proizvodnje uz fiksiranu količinu kapitala od 10 jedinica te različite količine čimbenika rada. U slučaju kada je čimbenik rada 0, tada je i proizvodnja jednaka 0. Rast proizvodnje moguć je kada se čimbenik rada povećava do 8 jedinica. Opadanje proizvodnje slijedi nakon te točke.

Kao što se u radu prije spominjalo, svaka dodatna jedinica omogućuje bolju proizvodnju uz korištenje postojećih strojeva i opreme, a svaki povećanje dodatnih zaposlenika rezultira kao višak radne snage. Svaka proizvodna traka je ograničena koliko količinski može proizvesti proizvoda te je na toj traci potreban određen broj zaposlenika. Ako se nastavi sa povećanjem broja zaposlenika, svaki dodatni radnik predstavlja rizik ometanja njihovog rada te na taj način oštećuje rast proizvodnje.

Također, usporedbom grafičkih prikaza 11. i 12. može se primijetiti razlika između ukupnog, prosječnog i graničnog proizvoda. Koristeći podatke iz tablice 4., razina proizvodnje uz različite količine čimbenika rada (ukupna proizvodnja) pokazuje grafikon 11. dok prosječni granični

proizvod prikazani su grafikonom 12. U trenutku kada prosječni proizvod postigne maksimum, točka A, granični i prosječni proizvod su jednake vrijednosti.

6. Zaključak

Za razvoj gospodarstva jedne države, veoma je važna proizvodnja. Procesom proizvodnje stvaraju se outputi koji služe ljudima na svakodnevnoj potrebi. Ti outputi su proizvodi koji se koriste u različite svrhe, pa čak i u kreiranje novih outputa. Kako bi jedan proizvod nastao, potrebni su inputi. To su sirovine i materijali, ili drugim riječima resursi, koji se koriste u posebnim procesima proizvodnje kako bi se kreirao konačni proizvod. Proizvodnja je promjena svojstava različitih inputa u konačni proizvod pri čemu se dodaje vrijednost. Važnu ulogu u proizvodnji preuzima proizvodni proces. Ako je proizvodni proces dobro realiziran, proizvodnja proizvoda će se ubrzati. Kako proizvodnja ne bi pošla po krivu, kreiraju se planovi proizvodnje. Oni služe kako bi se proizvodnja održavala bez prekida i usporavanja.

Jednadžba proizvodne funkcije predstavlja proizvodnu funkciju koja govori kako ona predstavlja najveću moguću količinu finalnog proizvoda, uz nepromijenjenu kombinaciju ulaznih resursa. Formula proizvodne funkcije ukazuje na to kako količina gotovih proizvoda ovisi o jedinici rada na kapitalu korištenom u samoj proizvodnji te iz toga razloga važno je da su svi inputi, koji ulaze u proces, spojivi.

Također, u radu su navedene ukupna, prosječna i granična vrijednost. Ukupna vrijednost je zbrojena proizvodnja nekog proizvoda te ona govori kolika će biti ukupna proizvodnja uz određene uvjete. Kada se govori o prosječnoj vrijednosti, smatra se kako ona predstavlja ukupnu vrijednost po jednoj jedinici proizvodnog faktora. Njen izračun se dobiva stavljanjem ukupnog proizvoda i količine rada u omjer. Granična vrijednost je vrijednost koja se dobiva kada bi se proizvela dodatna jedinica proizvodnog faktora. Vrijednost se dobiva na način da se promjena ukupne vrijednosti stavi u omjer sa promjenom proizvodnog faktora. U trenutku kada prosječni proizvod postigne svoj maksimum, granični i prosječni proizvod su jednake vrijednosti.

Proizvodna funkcija se može izraziti u 3 oblika: u obliku tablice, algebarski izraz i grafikon. Proporcionalna proizvodna funkcija predstavlja rezultat konstantnog odnosa između količine prinosa i količine jednog fleksibilnog inputa tijekom kojeg količina prinosa raste za istu vrijednost svaki put kada se doda nova jedinica inputa te se iz toga razloga ona još naziva i linearna proizvodna funkcija. Grafički, linearna proizvodna funkcija predstavlja liniju

rezultat je konstantnog odnosa između količine prinosa i količine jednog fleksibilnog (promjenjivog) resursa u kojem količina prinosa raste za isti iznos svaki put kada se doda jedna

jedinica inputa. Drugi naziv za proporcionalnu proizvodnu funkciju jest linearna proizvodna funkcija te grafički ima isti nagib. Upravo to predstavlja geometrijski pojam koji označava koeficijent smjera, u cijelom rasponu ulaganja fleksibilnog inputa. Druga je progresivna proizvodna funkcija koja se većinom u početnoj fazi utroška fleksibilnog resursa. Ona poprima oblik krivulje konveksno zakrivljenu te nagib postaje strmiji sa rastom inputa. Posljednja proizvodna funkcija je opadajuća (degresivna) proizvodna funkcija te se ona sve više očituje padom, odn. Usporenim rastom. Njen nagib se smanjuje prilikom dodavanje dodatnog resursa.

Proizvodnja s jednim varijabilnim faktorom prikazuje se pomoću grafičkih prikaza koji su bazirani na informacijama koji su poznati ili se mogu pretpostaviti. Ona poduzeću pomaže pri dodatnoj proizvodnji koja se pojavljuje tijekom povećanja dodatne vrijednosti inputa, tj. pri usporedbi granične veličine troškova i koristi.

Literatura

1. Babić, M. (1997.) *Mikroekonomska analiza*. Zagreb: MATE.
2. Chaing, Alpha C. (1994.) *Osnovne metode matematičke ekonomije*. Zagreb: MATE.
3. Cvetanović, S.Ž., Despotović, D.Z. (2014.) *Škola Biznisa - Znanje kao komponenta ljudskog kapitala u modelima ekonomskog rasta*. Novi Sad: Visoka poslovna škola strukovnih studija.
4. Faktori proizvodnje. *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2022. Dostupno na: <https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=18884>. [pristupljeno: 10. srpnja 2022.].
5. Heathfield, D. F., Wibe, S. (1987.) *An Introduction to Cost and Production Functions*. London: Macmillan Education LTD.
6. Karić, M. (2006.) *Mikroekonomika*. Osijek: Ekonomski fakultet u Osijeku.
7. Karić, M. (2010.) *Priručnik za vježbe iz mikroekonomike*, Osijek: Ekonomski fakultet u Osijeku.
8. Kekez, F. (2002.) *Proizvodni sustavi*. Slavonski Brod: Strojarski fakultet.
9. Kliček, D. (2014.) *Proizvodna funkcija u organizaciji*. Seminarski rad. Sveučilište u Zagrebu: Fakultet Organizacije i informatike.
10. Lopez Vargas, K. (2017.) *Technology (Chapter 19)*. Dostupno na: https://kmlv.github.io/Econ100A_F17/S8_Technology_Ch19/ [pristupljeno 15. srpnja 2022.].
11. Mikac, T., Blažević, D. (2007.) *Planiranje i upravljanje proizvodnjom*. Rijeka: Tehnički fakultet Rijeka.
12. Pavić, I., Benić, Đ., Hashi, I. (2006.) *Mikroekonomija*. Split: Ekonomski fakultet u Splitu.
13. Pindyck, R.S., Rubinfeld, D.L. (2005.) *Mikroekonomika*. Zagreb: MATE.
14. Proizvod. *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2022. <https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=50570>. [pristupljeno 12. srpnja 2022.].
15. Sabolić, D. (2013.) *Osnovni pojmovi iz teorije proizvodnje*. Zagreb: Udžbenici sveučilišta u Zagrebu.
16. Sabolić, D. (2014.) *Uvod u mikroekonomiku*. Zagreb: Udžbenici sveučilišta u Zagrebu.
17. Santini, I. (2004.) *Mikroekonomika*. Zagreb: Hibis d.o.o., Centar za consulting.
18. Shepard, R.W. (1970.) *Theory of Cost and Production Functions*. New Jersey: Princeton University Press.

Popis tablica

Tablica 1. Ukupni proizvod u slučaju povećanja rada	8
Tablica 2. Prosječni proizvod.....	9
Tablica 3. Granični proizvod.....	11
Tablica 4. Proizvodnja s jednim varijabilnim faktorom.....	20

Popis grafikona

Grafikon 1. Proizvodna funkcija	Error! Bookmark not defined.
Grafikon 2. Ukupni proizvod u slučaju povećanja rada.....	Error! Bookmark not defined.
Grafikon 3. Prosječni proizvod rada	Error! Bookmark not defined.
Grafikon 4. Granični proizvod	11
Grafikon 5. Ukupni, prosječni i granični proizvod	Error! Bookmark not defined.
Grafikon 6. Slojevi proizvodnje i prosječni i granični proizvod.....	13
Grafikon 7. Opći oblik proizvodne funkcije	15
Grafikon 8. Proporcionalna proizvodna funkcija s jednim promjenjivim inputom	16
Grafikon 9. Prikaz progresivne proizvodne funkcije s jednim promjenjivim inputom	17
Grafikon 10. Prikaz degresivne proizvodne funkcije s jednim promjenjivim inputom.....	18
Grafikon 11. Ukupni proizvod (Proizvodnja s jednim varijabilnim faktorom)	20
Grafikon 12. Prosječni i granični proizvod (Proizvodnja s jednim varijabilnim faktorom)	21