Metode za rješavanje linearnog programiranja te njihova primjena u ekonomiji

Blagojević, Vanja

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Ekonomski fakultet u Osijeku

Prijediplomski studij Ekonomija i poslovna ekonomija

Vanja Blagojević

METODE ZA RJEŠAVANJE LINEARNOG PROGRAMIRANJA TE NJIHOVA PRIMJENA U EKONOMIJI

Završni rad

Osijek, 2024.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Ekonomski fakultet u Osijeku

Prijediplomski studij Ekonomija i poslovna ekonomija

Vanja Blagojević

METODE ZA RJEŠAVANJE LINEARNOG PROGRAMIRANJA TE NJIHOVA PRIMJENA U EKONOMIJI

Završni rad

Kolegij: Kvantitativne metode za poslovno odlučivanje

JMBAG: 0010234857

e- mail: vblagojevic@efos.hr

Mentor: prof.dr.sc. Martina Briš

Osijek, 2024.

Josip Juraj Strossmayer University of Osijek

Faculty of Economics and Business in Osijek

University Undergraduate Study Programme Economics and Business

Vanja Blagojević

METHODS FOR SOLVING LINEAR PROGRAMMING AND THEIR APPLICATION IN ECONOMICS

Final paper

Osijek, 2024.

IZJAVA

O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

PRAVU PRIJENOSA INTELEKTUALNOG VLASNIŠTVA,

SUGLASNOSTI ZA OBJAVU U INSTITUCIJSKIM REPOZITORIJIMA

I ISTOVJETNOSTI DIGITALNE I TISKANE VERZIJE RADA

1. Kojom izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je završni rad isključivo rezultat osobnoga rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu. Potvrđujem poštivanje nepovredivosti autorstva te točno citiranje radova drugih autora i referiranje na njih.

2. Kojom izjavljujem da je Ekonomski fakultet u Osijeku, bez naknade u vremenski i teritorijalno neograničenom opsegu, nositelj svih prava intelektualnog vlasništva u odnosu na navedeni rad pod licencom Creative Commons Imenovanje - Nekomercijalno - Dijeli pod istim uvjetima 3.0 Hrvatska.

3. Kojom izjavljujem da sam suglasan/suglasna da se trajno pohrani i objavi moj rad u institucijskom digitalnom repozitoriju Ekonomskoga fakulteta u Osijeku, repozitoriju Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku te javno dostupnom repozitoriju Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (u skladu s odredbama Zakona o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju „Narodne novine“ broj 123/03., 198/03., 105/04., 174/04., 2/07.-Odluka USRH, 46/07., 63/11., 94/13., 139/13., 101/14.-Odluka USRH, 60/15.-Odluka USRH i 131/17.).

4. Izjavljujem da sam autor/autorica predanog rada i da je sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti istovjetan sa dovršenom tiskanom verzijom rada predanom u svrhu obrane istog.

Ime i prezime studenta/studentice: Vanja Blagojević

JMBAG: 0010234857

OIB: 14339111270

E-mail za kontakt: vblagojevic@efos.hr

Naziv studija: Sveučilišni prijediplomski studij Ekonomija i poslovna ekonomija

Naslov rada: Metode za rješavanje linearnog programiranja te njihova primjena u ekonomiji

Mentor/mentorica rada: prof. dr. sc. Martina Briš

U Osijeku, 2024. godine

Potpis ________________________

Metode za rješavanje linearnog programiranja te njihova primjena u ekonomiji

SAŽETAK

Linearno programiranje je osnova kvantitativnih metoda koje služe za optimizaciju resursa u okviru određenih ograničenja, omogućavajući učinkovito donošenje poslovnih odluka. Glavni cilj linearnog programiranja je maksimizirati profit ili minimizirati troškove koristeći matematičke alate i metode za rješavanje problema. Rad je strukturiran u nekoliko dijelova koji se bave teorijskim i praktičnim aspektima ove tehnike. U teorijskom dijelu, autor opisuje pojam linearnog programiranja, njegov povijesni razvoj i ključne pojmove. Pritom se osvrće na važne etape u razvoju linearnog programiranja, počevši od modela Wassilyja Leontiefa i Leonida Kantorovicha, pa sve do simpleks metode koju je 1947. godine razvio George Dantzig. U praktičnom dijelu rada, fokus je na dvije glavne metode za rješavanje problema: simpleks metoda i grafička metoda. Simpleks metoda, kao jedna od ključnih tehnika za rješavanje složenih problema, ističe se po svojoj učinkovitosti u radu s mnogim varijablama i ograničenjima. Ova metoda koristi iterativni proces za pronalazak optimalnog rješenja unutar definiranih ograničenja. U radu su prikazani primjeri primjene ove metode kroz softverske alate poput Microsoft Excela i dodatka Solver, gdje je poseban naglasak na rješavanju problema transporta kako bi se minimizirali troškovi distribucije između različitih lokacija. Grafička metoda, iako jednostavnija, koristi se za vizualno rješavanje problema s najviše dvije varijable. Unatoč ograničenjima u složenijim problemima, ova metoda pruža koristan okvir za razumijevanje osnovnih principa optimizacije. U radu je detaljno prikazan primjer primjene grafičke metode u Excelu, gdje se rješava problem optimizacije proizvodnje s ciljem maksimizacije profita. Prema autoru, linearno programiranje ima široku primjenu u ekonomiji. Primjeri uključuju optimizaciju proizvodnje, smanjenje troškova transporta, upravljanje zalihama, financijsko planiranje i raspodjelu radne snage. Autor također donosi primjere iz stvarnog svijeta, poput optimizacije ulaganja u hedge fondovima (primjer Bridgewater Associates), upravljanja rafinerijskim procesima u naftnim kompanijama (primjer Royal Dutch Shell) te optimizacije opskrbnog lanca u maloprodaji (primjer Walmart). Zaključno, rad naglašava važnost linearnog programiranja u rješavanju složenih poslovnih i ekonomskih problema. Simpleks metoda se pokazala kao najefikasnija za rad s velikim brojem varijabli, dok grafička metoda ostaje korisna za jednostavnije, edukativne primjere. Linearno programiranje, kao alat matematičke optimizacije, omogućava menadžerima i ekonomistima donošenje informiranih odluka na temelju analize kvantitativnih podataka, čime se povećava učinkovitost i profitabilnost. Daljnji napredak tehnologije dodatno će proširiti primjenu ovih metoda, čineći ih još značajnijim u budućim gospodarskim okruženjima. Ovaj rad doprinosi boljem razumijevanju značaja optimizacijskih metoda u poslovnom odlučivanju te ističe ključnu ulogu linearnog programiranja u praktičnim rješenjima ekonomskih problema.

Ključne riječi: linearno programiranje, kvantitativne metode za poslovno odlučivanje, grafička metoda, simpleks metoda, maksimizacija, minimizacija, optimizacija

SUMMARY

Linear programming is the basis of quantitative methods that serve to optimize resources within certain constraints, enabling effective business decision-making. The main goal of linear programming is to maximize profits or minimize costs by using mathematical tools and methods to solve problems. The paper is structured in several parts dealing with the theoretical and practical aspects of this technique. In the theoretical part, the author describes the concept of linear programming, its historical development and key terms. In doing so, he looks back at the important stages in the development of linear programming, starting with the model of Wassily Leontief and Leonid Kantorovich, all the way to the simplex method developed in 1947 by George Dantzig. In the practical part of the paper, the focus is on two main methods of problem solving: the simplex method and the graphical method. The simplex method, as one of the key techniques for solving complex problems, stands out for its efficiency in working with many variables and constraints. This method uses an iterative process to find the optimal solution within defined constraints. The paper presents examples of the application of this method through software tools such as Microsoft Excel and the Solver plugin, where special emphasis is placed on solving transportation problems in order to minimize distribution costs between different locations. The graphical method, although simpler, is used to visually solve problems with a maximum of two variables. Despite its limitations in more complex problems, this method provides a useful framework for understanding the basic principles of optimization. The paper presents in detail an example of the application of the graphical method in Excel, where the problem of optimizing production with the aim of maximizing profit is solved. According to the author, linear programming is widely used in economics. Examples include production optimization, transportation cost reduction, inventory management, financial planning, and labor allocation. The author also provides examples from the real world, such as optimizing investments in hedge funds (example Bridgewater Associates), managing refinery processes in oil companies (example Royal Dutch Shell) and optimizing the supply chain in retail (example Walmart). In conclusion, the paper emphasizes the importance of linear programming in solving complex business and economic problems. The simplex method proved to be the most efficient for working with a large number of variables, while the graphical method remains useful for simpler, educational examples. Linear programming, as a mathematical optimization tool, enables managers and economists to make informed decisions based on quantitative data analysis, thereby increasing efficiency and profitability. Further advances in technology will further expand the application of these methods, making them even more significant in future economic environments. This paper contributes to a better understanding of the importance of optimization methods in business decision-making and highlights the key role of linear programming in practical solutions to economic problems.

Keywords: linear programming, quantitative methods for business decision-making, graphical method, simplex method, maximization, minimization, optimization

SADRŽAJ

Sadržaj

1. Uvodni dio rada

Linearno programiranje predstavlja ključnu metodu u operacijskom istraživanju i matematičkoj optimizaciji, široko je korištena u ekonomiji za rješavanje problema koji ponajprije uključuju raspodjelu resursa, planiranje proizvodnje i ekonomska predviđanja. Zbog svoje sposobnosti oblikovanja složenih procesa donošenja odluka kroz sva ograničenja i linearne odnose, autor smatra kako je ovo jedan od najmoćnijih alata, kako za teorijsku analizu, tako i za praktičnu primjenu. Prva spominjanja linearnog programiranja pripisuju se Fourier-u već početkom 19. stoljeća, te u 1940-ima sa korištenjem Simplex metode Georgea Dantziga, koja je transformirala pristup ponajviše problemima optimizacije. Od tada je područje značajno naraslo, razvijajući naprednije algoritme i metode za rješavanje sve složenijih i većih problema, držeći korak sa napretkom računalne tehnologije. To je omogućilo primjenu linearnog programiranja u različitim ekonomskim okolinama, od mikroekonomske optimizacije na razini poduzeća do analize makroekonomske politike.

U teorijskom dijelu rada objašnjeno je što to zapravo podrazumijeva pojam linearnog programiranja, kako se razvijao kroz povijest i gdje se nalazi sada. Nadalje, opisane su i objašnjene dvije metode rješavanja problema u vidu „Simplex LP metode“ i „Grafičke metode“, te njihove prednosti i mane. Također, opisani su i parametri koji su potrebni za rješavanje određenog problema putem određene metode, počevši od funkcije cilja koja je prva pretpostavka koja se postavlja u samom začetku problema, te ograničenja koja ju prate u njenom ispunjenju. U sljedećem dijelu rada, opisani su problemi koji se mogu rješavati putem ovih metoda, koji uključuju, transportni problem linearnog programiranja koji je i riješen na konkretnom primjeru, te opći problem linearnog programiranja.

Cilj ovog rada jest upoznati čitatelja sa samim pojmom linearnog programiranja, kako se ono primjenjuje u ekonomiji, vrstama problema koje se mogu riješiti pomoću linearnog programiranja u području ekonomije uz primjere, same povijesti linearnog programiranja, te gdje se to točno primjenjuje u ekonomiji, ali i važnosti njegove primjeni u ekonomiji.

2. Metodološki dio rada

Većinski dio rada napravljen je analizom sekundarnih izvora podataka koji su prikupljeni kroz razne podatke iz dostupne stručne literature, stručne radove, internet stranice, te znanstvene i diplomske radove uz kombinaciju osobnih stavova autora. Za interpretiranje podataka korištena je metoda dedukcije, pomoću koje su se izvodili osobni stavovi na temelju općih mišljenja. Uz metodu dedukcije, za opisivanje podataka korištena je deskriptivna metoda u svrhu iznošenja činjenica i općeg stanja nekih pojmova, u simbiozi sa metodom kompilacije, za uvid u osobna mišljenja različitih autora na istu temu, te njihovih zapažanja.

3. Pojam linearno programiranje

Linearno programiranje je tehnika matematičke optimizacije koja se koristi za maksimiziranje ili minimiziranje linearne funkcije cilja, ovisno koji nam je cilj korištenja ove tehnike (Dantzig, 1998.). Ograničena je skupom ograničenja linearne jednakosti i nejednakosti. Temeljni je alat u operacijskom istraživanju, ekonomiji, inženjerstvu i raznim znanstvenim disciplinama. U ekonomiji je linearno programiranje najprije napredovalo više na teorijskom nivou, s objašnjenjima, nego u praktičnoj primjeni. To je bilo zbog toga što je ručno računanje za sustave s mnogo ograničenja i varijabli bilo vrlo vremenski zahtjevno i podložno čestim greškama, što je rezultiralo netočnim rješenjima. No, s razvojem tehnologije, posebno informacijske, postalo je moguće rješavati modele linearnog programiranja bez utjecaja složenosti, tj. broja restrikcija i varijabli (Dantzig, 1998.). Ovaj napredak omogućio je brži razvoj modela i njihovu učinkovitiju primjenu u rješavanju problema. Slično se dogodilo i s drugim kvantitativnim metodama i modelima u ekonomiji. U ekonomiji, mnogi pokazatelji i odnosi zapravo nisu linearni. Manja odstupanja od linearnih obrazaca mogu se kompenzirati uvođenjem većeg broja varijabli. Ova se metoda primjenjuje za rješavanje različitih problema oblikovanih tako da koriste linearne algebarske metode za pronalaženje rješenja. Zbog toga je pogodna za primjenu u gotovo svim područjima, uključujući proizvodnju, transport, marketing, planiranje, te raspored zaposlenika, među ostalim. Rješavanjem funkcije cilja postavljene u zadatku dolazi se do najboljeg mogućeg rješenja postavljenog zadatka. Primarna svrha linearnog programiranja je odrediti optimalno rješenje unutar matematičkog modela gdje su zahtjevi predstavljeni linearnim odnosima, od tuda i naziv linearno programiranje. To omogućuje optimizaciju rješenja, kao što je maksimiziranje profita ili minimiziranje troškova, uz pridržavanje navedenih ograničenja. Linearno programiranje se koristi kao alat u teoriji odlučivanja za rješavanje specifičnih problema u poslovanju (Babić, 2005.). Iako je njegova knjiga primarno fokusirana na metode odlučivanja, Babić navodi da se linearno programiranje može primijeniti za optimizaciju troškova u raznim situacijama, kao što je raspored dežurstava u hitnoj pomoći. U ovom kontekstu, linearno programiranje pomaže u asignaciji osoblja na način koji minimalizira troškove, čime omogućava efikasnije poslovno odlučivanje. Drugi pogled na linearno programiranje je definiranje istog kao metoda za sistematsko rješavanje problema optimizacije, koja se koristi kada postoji veliki broj varijabli i ograničenja (Pavlović, 2005.). Pavlović naglašava da je linearno programiranje razvijeno kako bi se riješili složeni ekonomski problemi, poput smanjenja troškova u stočarstvu, gdje je cilj pronaći optimalnu kombinaciju hrane koja zadovoljava sve nutritivne zahtjeve uz minimalne troškove. Prema njemu, linearno programiranje počiva na ključnim pretpostavkama kao što su postojanje jasnog cilja, ograničenih resursa, alternativnih rješenja i linearnih odnosa među varijablama. Razvoj informacijske tehnologije omogućio je primjenu ove metode u rješavanju stvarnih problema, bez obzira na njihovu složenost i broj varijabli.

3.1. Povijesni razvoj

Povijest linearnog programiranja započela je 1930-ih godina s radom Wassilyja Leontiefa, koji je uveo model ulaz-izlaz za analizu međusobne povezanosti ekonomskih sektora. Ovaj model postavio je temelje za daljnji razvoj metodologije linearnog programiranja, omogućujući analitičko razumijevanje složenih ekonomskih interakcija. U 1940-ima, Leonid Kantorovich, sovjetski matematičar, prvi je definirao problem linearnog programiranja i razvio osnovne metode za optimizaciju resursa pod zadanim ograničenjima, čime je utemeljio ključne koncepte ovog područja.

Ključni napredak dogodio se 1947. godine kada je George Dantzig razvio simpleks metodu, koja je postala glavna metoda za rješavanje linearnih programa, omogućivši učinkovito upravljanje velikim brojem varijabli i ograničenja te time otvorila široku primjenu linearnog programiranja. Tijekom 1950-ih, teorijski rad se nastavio istraživanjem dvojnosti i daljnjim poboljšanjima simpleks metode. Značajni doprinosi istraživača poput Johna von Neumanna, Richarda Stonea i Kennetha Arrowa pomogli su u postavljanju osnove za primjenu linearnih modela u ekonomskim analizama, omogućujući bolju optimizaciju i razumijevanje ekonomskih procesa.S razvojem računala u 1960-ima, rješavanje velikih linearnih programa postalo je znatno brže i učinkovitije. Programi poput IBM-ovog MPSX omogućili su detaljnu analizu i rješavanje složenih problema u različitim industrijama, poput logistike, proizvodnje, distribucije, energetike i financijskog planiranja, poboljšavajući sposobnost optimizacije resursa i procesa.

Daljnji razvoj metoda i algoritama tijekom 1970-ih i 1980-ih doveo je do novih pristupa u rješavanju linearnih programa. Značajan napredak ostvario je Narendra Karmarkar sredinom 1980-ih s metodom unutarnjih točaka, koja je ponudila efikasnu alternativu simpleks metodi, omogućujući brže i skalabilnije rješavanje linearnih programa, osobito kod složenih problema s velikim brojem varijabli i ograničenja. Povijest linearnog programiranja pokazuje kako su teorijski i tehnološki napreci značajno proširili mogućnosti rješavanja složenih optimizacijskih problema u raznim sektorima.

3.2. Osnovni pojmovi

Kako bi mogli shvatiti na koji način se rješavaju problemi linearnog programiranja potrebno je prvo shvatiti neke od osnovnih pojmova koji se vežu uz sami zadatak. Početak svakog zadatka linearnog programiranja započinje sa odabiranjem varijabli odlučivanja u vidu nepoznanice x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Varijable odlučivanja prikazuju što se to pokušava izračunati, u većini slučajeva broj jedinica nekog proizvoda koje je cilj proizvesti kako bi se maksimalizirao profit, ili minimizirao trošak proizvodnje.

Nadalje, postavlja se funkcija cilja zadatka, gdje se određuje koji je cilj zadatka, maksimizacija profita ili minimizacija troška. Piše se u obliku opće formule (Šimunović, Havrlišan, 2019):

$$F\ (x) = c1 * x1 + c2 * x2 + \cdots cn * xn$$

Također ju je moguće zapisati i u obliku sažete formule:

$$F\ (x) = \sum cj \cdot x_j\ n_j$$

Gdje su:

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ – koeficijenti proporcionalnosti uz varijable u funkciji cilja

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – varijable, nepoznanice koje daju ekstremne vrijednosti funkcije cilja (minimum ili maksimum)

Sljedeća stavka koju je potrebno staviti u zadatku jesu ograničenja tj. Restrikcije koje se pojavljuju u svakom zadatku, te se i ona mogu zapisati u obliku formule (Šimunović i Havrlišan, 2019):

$$a11 * x1 + a12 * x2 + \cdots + a1n * xn \leq = \geq b1$$

$$a21 * x1 + a22 * x2 + \cdots + a2n * xn \leq = \geq b2$$

Gdje su:

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ – koeficijenti proporcionalnosti uz varijable u ograničenjima

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ - slobodni članovi ograničenja, desna strana ograničenja

Indeks j se proteže od 1 do n, što označava broj varijabli, dok se indeks i proteže u intervalu od 1 do m, što predstavlja broj ograničenja.

Također, Šimunović i Havrlišan (2019) ističu da, osim već zadanih stvari poput funkcije cilja pravilnom zadatku treba pridodati i uvjet nenegativnosti. Taj uvjet nalaže da vrijednosti varijabli moraju biti nenegativne, tj. veće ili jednake 0. U formalnom obliku, uvjet nenegativnosti izgleda ovako:

$$x1, x2, \ldots, xn \geq 0$$

$$xj \geq 0, \qquad j = 1,2, \ldots, n.$$

4. Primjena u ekonomiji

Linearno programiranje je izuzetno svestran alat koji se često primjenjuje u ekonomiji radi optimizacije resursa i racionalnog donošenja odluka u kompleksnim ekonomskim sustavima. Koristi se u područjima kao što su proizvodnja, distribucija, logistika, financije, marketing i upravljanje resursima (Dantzig, 1998). Primjena linearnog programiranja uključuje optimizaciju proizvodnje i upravljanje zalihama, gdje tvrtke mogu koristiti ovu metodologiju za minimiziranje proizvodnih troškova uz istovremeno zadovoljenje zahtjeva tržišta i kapaciteta proizvodnje. Također se primjenjuje u logistici radi optimizacije transportnih ruta i distribucije resursa kako bi se smanjili troškovi transporta ili vrijeme putovanja (Dantzig, 1998.).

U financijskom sektoru, linearno programiranje može biti od pomoći u optimizaciji portfelja ulaganja ili planiranju financijskih tokova kako bi se smanjio rizik ili maksimizirala profitabilnost (Sekhon & Bloom, 2016.). U planiranju resursa, linearno programiranje omogućuje učinkovito raspoređivanje ljudskih resursa, materijala ili opreme s ciljem maksimiziranja efikasnosti i minimiziranja troškova. Zahvaljujući svojoj fleksibilnosti i matematičkoj preciznosti, linearno programiranje ostaje ključni alat u ekonomskim analizama i procesu odlučivanja. Ono omogućuje ekonomistima i analitičarima da donose informirane odluke temeljene na kvantitativnim podacima i optimizaciji resursa, što doprinosi boljem upravljanju i efikasnosti u različitim industrijama.

4.1. Simplex LP metoda

George Dantzig zaslužan je za kreiranje Simplex metode, 1947. godine, kada je uočio da su vojni problemi s kojima se tada susretao uvelike slični problemima usklađivanja aktivnosti u organizacijama. Metoda Simplex linearnog programiranja (LP) u Microsoft Excelu predstavlja specijalizirani algoritam dostupan kroz dodatak Solver, osmišljen za rješavanje složenih problema optimizacije gdje je potrebno maksimizirati ili minimizirati linearnu funkciju cilja uz određena ograničenja. Ova metoda je posebno korisna u situacijama poput raspodjele resursa, smanjenja troškova i planiranja proizvodnje (Sekhon & Bloom, 2016.). U Excelu, postupak započinje definiranjem funkcije cilja, koja je obično formula u ćeliji i predstavlja vrijednost koju želite optimizirati, poput dobiti ili troškova. Varijable odluke, koje su nepoznate veličine koje trebate odrediti, smještaju se u zasebne ćelije. Ograničenja, koja definiraju granice unutar kojih se varijable mogu kretati, također su postavljena pomoću Excel formula (Sekhon & Bloom, 2016.). Za korištenje Simplex LP metode, pristupa se dodatku Solver, gdje se određuje ciljnu ćeliju za maksimizaciju ili minimizaciju. Zatim se specificiraju ćelije koje sadrže varijable odluke i unose se ograničenja, vodeći računa da su sva ograničenja linearna (tj. svako ograničenje mora biti linearna jednadžba ili nejednadžba). Sučelje Solvera omogućuje odabir Simplex LP metode kao načina rješavanja, što je idealno za linearne probleme. Također moguće je prilagoditi postavke Solvera, poput podešavanja razina tolerancije i odlučivanja o načinu rada s cjelobrojnim ograničenjima, kako bi se poboljšali procesi rješavanja. Nakon konfiguracije, Solver pretražuje moguća rješenja koristeći Simplex metodu, prolazi kroz izvedivo područje definirano postavljenim ograničenjima i identificira optimalno rješenje. Ova funkcionalnost čini Excel moćnim i pristupačnim alatom za izvođenje složenih zadataka linearnog programiranja, bez potrebe za posebnim softverom.

Autor smatra kako je Simplex metoda praktična za pristup za rješavanje problema linearnog programiranja, korištenjem slabih varijabli, tablica i zaokretnih varijabli za postizanje optimalnog rješenja. Linearno programiranje usredotočeno je na optimiziranje ishoda—bilo na njegovo maksimiziranje ili minimiziranje—pod određenim linearnim ograničenjima. Dok određeni mrežni alati mogu riješiti mnoge linearne programe, Simplex metoda pruža ručnu alternativu. Koraci za primjenu Simplex metode uključuju pretvaranje problema u njegov standardni oblik, uvođenje zaostalih varijabli, konstrukciju početne tablice, identificiranje i izvođenje operacija na zaokretnim varijablama, formiranje nove tablice, provjeru optimalnosti i određivanje optimalnih vrijednosti. Početni korak u rješavanju problema koristeći Simplex metodu uključuje pretvaranje problema u njegov kanonski oblik. Ovaj se proces sastoji od niza ponavljanja, pri čemu svaki korak daje osnovno rješenje. Proces počinje formiranjem početnog rješenja, razmatrajući je li problem postavljen kao maksimiziranje ili minimiziranje i osiguravajući da je prilagođen kanonskom obliku. Nakon toga se procjenjuje optimalnost početnog rješenja; ako je optimalna, proces se završava. Ako nije, rješenje prolazi daljnja ponavljanja radi poboljšanja. U konačnici, nakon nekoliko ponavljanja, ili se pronađe optimalno rješenje ili se utvrdi da optimalno rješenje ne postoji. Prema Brajdić (2012.), iz dobivenih rezultata mogu se provesti razne dodatne analize, kao što su pronalaženje cjelobrojnog rješenja, određivanje dualnih vrijednosti i analiza osjetljivosti.

4.1.1. Praktični primjer korištenja Simplex metode u Microsoft Excell-u

U ovom poglavlju autor je prikazao korištenje Simplex LP metode unutar programa Microsoft Excel, uz pomoć Microsoft Excel Solver-a na konkretnom zadatku transportnog problema, koji je u ovom slučaju zatvorenog tipa. Zatvoreni transporti problem prepoznaje se po tome što su vrijednosti ponude i potražnje jednaki, dok se u otvorenom tipu oni razlikuju.

Zadatak: Jedna tvrtka posjeduje dva proizvodna pogona (Pogon 1 i Pogon 2) koji trebaju dostaviti svoje proizvode u tri skladišta (Skladište A, Skladište B i Skladište C). Količine proizvoda dostupne za transport iz svakog pogona, kao i potrebne količine u svakom skladištu, su sljedeće: Pogon 1 može isporučiti 50 jedinica proizvoda. Pogon 2 može isporučiti 60 jedinica proizvoda. Skladište A treba primiti 30 jedinica. Skladište B treba primiti 40 jedinica. Skladište C treba primiti 40 jedinica.. Problem se sastoji u tome da se proizvodi transportiraju od ishodišta do odredišta uz minimalne troškove, odnosno traži se optimalni plan transporta.

Zadana matrica jediničnih troškova :

cij	A	B	C	ai
P1	6	8	10	50
P2	9	12	7	60
bj	30	40	40	

Slika 1. Matrica jediničnih troškova Izvor: podatke odredio autor

Uvidom u matricu jediničnih troškova moguće je odrediti koliki su troškovi transporta iz određenog pogona (označenih P1 I P2), do određenog skladišta (označenih A, B, C).

Korak 1 : napraviti tablicu za oznakama jediničnih troškova za lakše kasnije pozivanje u zadatku

xij	A	B	C	ai
P1	c11	c12	c13	50
P2	c21	c22	c23	60
bj	30	40	40	

Slika 2. Tablica jediničnih troškova Izvor: podatke odredio autor

U ovoj tablici ai predstavlja ponudu pogona, a bj potražnju skladišta.

Korak 2 : Zapisati funkciju cilja u vidu formule

FUNKCIJA CILJA
minT=6x11 + 8x12 + 10x13 + 9x21 + 12x22 + 7x23
minT=c11x11 + c12x12 + c13x13 + c21x21 + c22x22 + c23x23

Slika 3. Funkcija cilja Izvor: podatke odredio autor

Cilj zadatka je minimizacija troška, te funkcija cilja izgleda kao gore prikazano.

Korak 3 : Dokazati da se radi o zatvorenom tipu transportnog problema

	50+60	=	30+40+40
	110	=	110
	a1 + a2	=	b1 + b2 + b3

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Slika 4. Restrikcije Izvor: podatke odredio autor

Razina ponude i potražnje je jednaka, što znači da se radi o zatvorenom tipu transportnog problema, također je navedena opća formula za zatvoreni transportni problem.

Korak 4 : Uvesti restrikcije pogona i skladišta

PONUDA POGONA					
P1	x11 + x12 + x13	=	50	$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = 50$	$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = a_1$
P2	x21+x22+x23	=	60	$\sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 60$	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j} = a_2$

Slika 5. Restrikcije pogona Izvor: podatke odredio autor

Iz zadatka su poznata ograničenja svakog od pogona, te su prikazane formule za ovaj zadatak, te opća formula za prikaz restrikcija ponude.

POTRAŽNJA SKLADIŠTA							
A	x11 + x21	=	30	$\sum_{i=1}^{2} x_{i1} = 30$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = b_1$		
B	x12 + x22	=	40	$\sum_{i=1}^{2} x_{i2} = 40$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i2} = b_2$	$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$	$j = 1,2,\ldots,n$
C	x13 + x23	=	40	$\sum_{i=1}^{2} x_{i3} = 40$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i3} = b_3$		

Slika 6. Restrikcije skladišta Izvor: podatke odredio autor

Kao i kod ponude, ograničenja potražnje su također pročitana iz zadatke, te su prikazane formule za konkretni problem, ali i opća formula.

Korak 6 : potrebno je odrediti varijable odlučivanja za konkretni zadatak

VARIJABLE ODLUČIVANJA				
xij	A	B	C	ai
P1	0	0	0	50
P2	0	0	0	60
bj	30	40	40	

Slika 7. Varijable odlučivanja Izvor: podatke odredio autor

Kako se u ovom konkretnom problemi nalaze 2 pogona uz 3 skladišta broj varijabli odlučivanja se dobije množenjem broja pogona i skladišta, u ovom konkretnom problemu varijabli odlučivanja je 6.

VARIJABLE ODLUČIVANJA	
x_{11}	količina proizvoda koji se transportira iz pogona P1 do skladišta A
x_{12}	količina proizvoda koji se transportira iz pogona P1 do skladišta B
x_{13}	količina proizvoda koji se transportira iz pogona P1 do skladišta C
x_{21}	količina proizvoda koji se transportira iz pogona P2 do skladišta A
x_{22}	količina proizvoda koji se transportira iz pogona P2 do skladišta B
x_{23}	količina proizvoda koji se transportira iz pogona P2 do skladišta C

Slika 8. Varijable odlučivanja opisane Izvor: podatke odredio autor

Korak 7 : Napraviti pripremu za Solver

VARIJABLE ODLUČIVANJA				
xij	A	B	C	ai
P1	0	0	0	50
P2	0	0	0	60
bj	30	40	40	

Slika 9. Priprema za Solver - Metode odlučivanja Izvor: podatke odredio autor

Vrijednosti varijabli odlučivanja poprimaju vrijednost 0, te se nakon korištenja Solver-a dobiva optimalno rješenje.

Kod funkcije cilja u formulu se povlače vrijednosti varijabli odlučivanja iz ćelija sa prethodne slike, uz formulu SUMPRODUCT, koja nakon Solver-a izbacuje konačno rješenje zadatka.

Također, potrebno je zapisati formule za restrikcije ponude i potražnje, kako bi ih stavili u Solver. Podaci za restrikcije se vuku iz ćelija kao i za funkciju cilja, uz korištenje formule SUM. Gdje je P1 jednak sumi brojeva iz ćelija c_{11}, c_{12}, c_{13}, a A iz ćelija c_{11} i c_{21}.

RESTRIKCIJE	
PONUDA POGONA	
P1	0
P2	0
POTRAŽNJA SKLADIŠTA	
A	0
B	0
C	0

=SUM(D58:D59)

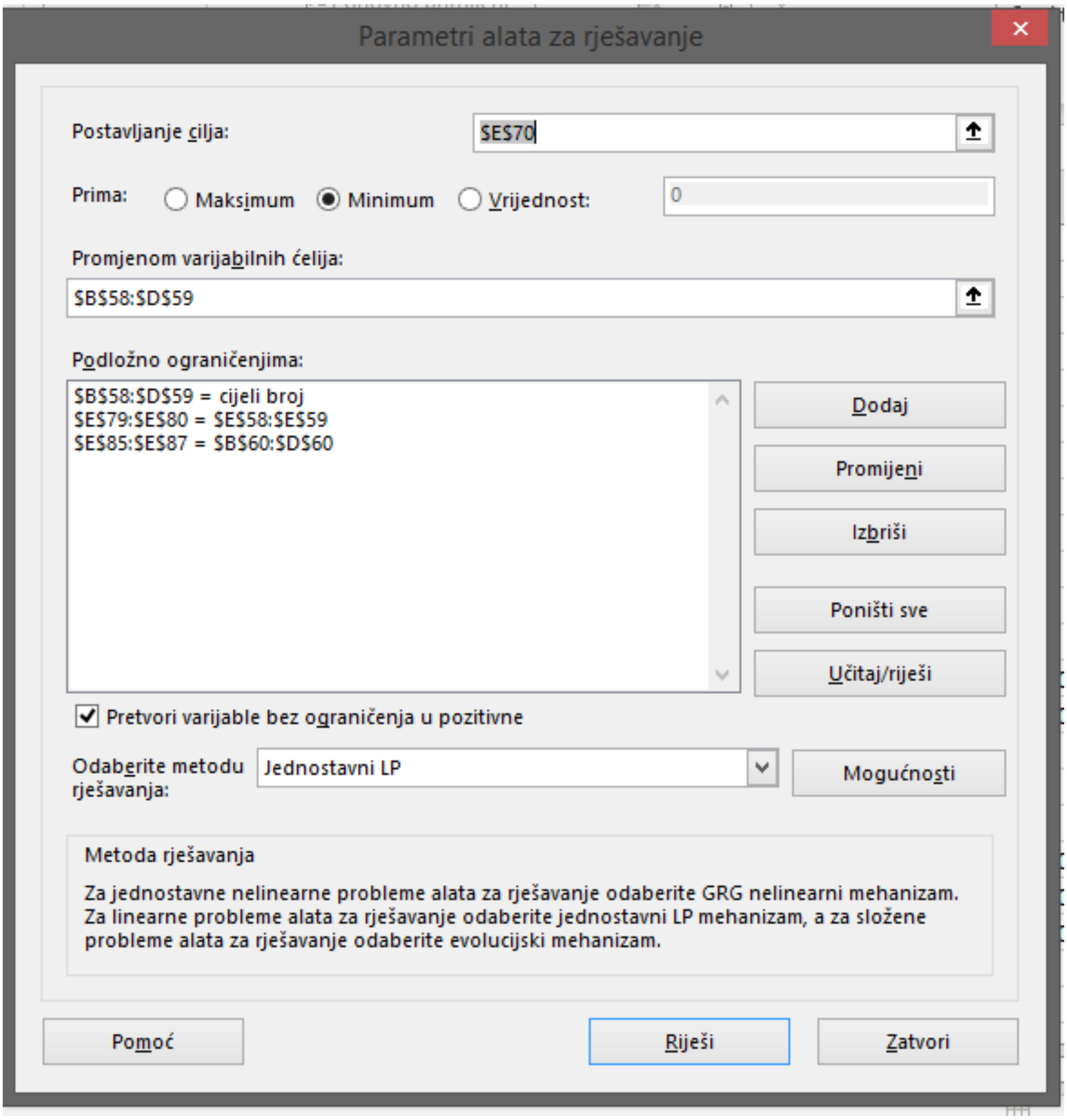
Slika 10. Priprema za Solver - Restrikcije Izvor: podatke odredio autor

=SUM(B58:D58)

Korak 8 : Pokretanje i namještanje Solver-a

Otvaranjem kartice Podaci u Excel-u nudi se opcija Alat za rješavanje (Solver).

Pri postavci cilja, uzima se ćelija gdje je formula za funkcija cilja. Odabire se opcija za minimalizaciju, budući da zadatak to zahtjeva. Odabirom tih ćelija promjena vrijednosti varijabli odlučivanja postaje moguća. Uzimajući u obzir ograničenja, prvo se unose vrijednosti ograničenja prema pripremi za rješavanje, zatim se bira znak "=" i unose se vrijednosti ćelija na desnoj strani ograničenja u skladu s gore opisanim zadatkom.



Slika 11. Microsoft Solver Izvor: Microsoft Excel

Klikom na tipku „Riješi“ dolazi se do konačnog rješenja zadatka, te se otvaraju tri izvješća iz kojih se može pročitati kako je Solver došao do odgovora.

Ćelija	Naziv	Izvorna vrijednost	Završna vrijednost
$E$70	Minimalna vrijednost transporta ai	352	840

Varijabilne ćelije

Ćelija	Naziv	Izvorna vrijednost	Završna vrijednost	Cijeli broj
$B$58	P1 A	12	10	Cijeli broj
$C$58	P1 B	0	40	Cijeli broj
$D$58	P1 C	8	0	Cijeli broj
$B$59	P2 A	0	20	Cijeli broj
$C$59	P2 B	12	0	Cijeli broj
$D$59	P2 C	8	40	Cijeli broj

Ograničenja

Ćelija	Naziv	Vrijednost ćelije	Formula	Stanje	Zaliha
$E$79	P1 ai	50	$E$79=$E$58	Obvezujuće	0
$E$80	P2 ai	60	$E$80=$E$59	Obvezujuće	0
$E$85	A ai	30	$E$85=$B$60	Obvezujuće	0
$E$86	B ai	40	$E$86=$C$60	Obvezujuće	0
$E$87	C ai	40	$E$87=$D$60	Obvezujuće	0
$B$58:$D$59=Cijeli broj					

Slika 12. Izvješće o odgovoru Izvor: Microsoft Excel

Iz izvješća o odgovoru moguće je iščitati da su optimalna rješenja koja dovode do minimalnog troška transporta sljedeća :

xij	A	B	C	ai
P1	10	40	0	50
P2	20	0	40	60
bj	30	40	40	

Slika 13. Konačna rješenja Izvor: Microsoft Excel

4.2. Grafička metoda

Grafička metoda je vizualni pristup za rješavanje problema linearnog programiranja s dvije varijable odluke, koji omogućuje jednostavno pronalaženje optimalnog rješenja putem grafičkog prikaza ograničenja i funkcije cilja (Sekhon & Bloom, 2016.). Proces započinje formuliranjem problema određivanjem funkcije cilja, f(x)=ax+by, i prikazivanjem ograničenja kao linearnih nejednadžbi. Svako ograničenje se crta kao ravna linija na liniji funkcije cilja tako da se nejednadžba pretvori u jednadžbu i odrede presjeci, a zatim se utvrđuje koja strana linije zadovoljava nejednadžbu. Dopušteno područje, gdje se svi uvjeti preklapaju, obično je poligon, a potencijalna optimalna rješenja nalaze se na sjecištima tih linija ograničenja (Sekhon & Bloom, 2016.). Funkcija cilja se zatim crta kao linija postavljena na konstantnu vrijednost i pomiče se paralelno preko izvedivog područja kako bi se odredio smjer optimizacije. Optimalno rješenje, bilo da je maksimalno ili minimalno, dobiva se procjenom funkcije cilja na svakom vrhu izvedive regije i izborom najbolje vrijednosti. Posebni slučajevi uključuju neograničena izvediva područja, gdje funkcija cilja možda nema maksimum ili minimum, te situacije s višestrukim optimalnim rješenjima kada je funkcija cilja paralelna s nekom linijom ograničenja unutar dopuštenog područja. Grafička metoda je jednostavna i intuitivna, ali je ograničena na probleme s najviše dvije varijable; za probleme s više varijabli koriste se naprednije metode poput Simplex metode (Sekhon & Bloom, 2016.).

4.2.1. Praktični primjer grafičke metode u Microsoft Excel-u

U ovom poglavlju autor je prikazao primjer korištenja grafičke metode, te sve korake potrebne za rješavanje pri upotrebi alata Microsoft Excel programa kroz zadatak koji glasi: „Jedno društvo odlučilo je prodavati dva svoja proizvoda P1 i P2. Dobit koju bi mogli ostvariti prodajom jedne jedinice proizvoda P1 iznosi 2 novčane jedinice, a po jedinici proizvoda P2 dobit od 5 novčanih jedinica. Društvo za proizvodnju ima dva stroja čiji dnevni kapaciteti iznose 12 i 9 sati rada. Za proizvodnju jedne jedinice prvog proizvoda koristi se 1 sat rada stroja S1, te 3 sata rada stroja S2, dok za proizvodnju jedne jedinice drugog proizvoda se koriste 4 sata rada stroja S1, te 1 sat rada stroja S2. Potrebno je odrediti program proizvodnje po kojemu će društvo maksimalizirati svoj profit“. Zadatak se može zapisati kroz formulu gdje je prvo prikazana zadana funkcija cilja, te ograničenja radnih strojeva koja ju prate:

$\text{Max}(Z) = 2x_1 + 5x_2$,

$1x_1 + 4x_2 \leq 12$,

$3x_1 + 1x_2 \leq 9$,

Također, jedan od uvjeta koji se mora postaviti je i uvjet nenegativnosti, koji glasi :

$X1 \geq 0$,

$X2 \geq 0$

Uvjet nenegativnosti se postavlja zato što varijable odlučivanja x1 i x2 ne mogu poprimiti negativnu vrijednost u rješenju zadatka.

Sljedeći korak u rješavanju zadatka je postavljanje restrikcija u pisanom obliku za svaki stroj u proizvodnji :

OGRANIČENJA/RESTRIKCIJE									
S1		1	x1	+	4	x2	≤	12	
S2		3	x1	+	1	x2	≤	9	

Slika 14. Ograničenja u grafičkoj metodi Izvor: podatke odredio autor

Objašnjenje restrikcija (prilagođeno prema : Briš-Alić, 2023.)

Stroj 1 : Prilikom proizvodnje x1 jedinica proizvoda P1 i x2 jedinica proizvoda P2 potrebno je iskoristiti 1x1 + 4x2 sati, korištenja stroja S1 s time da se on ne može koristiti više od 12 sati dnevno.

Stroj 2 : Prilikom proizvodnje x1 jedinica proizvoda P1 i x2 jedinica proizvoda P2 potrebno je iskoristiti 3x1 + 1x2 sati, korištenja stroja S2 s time da se on ne može koristiti više od 9 sati na dan

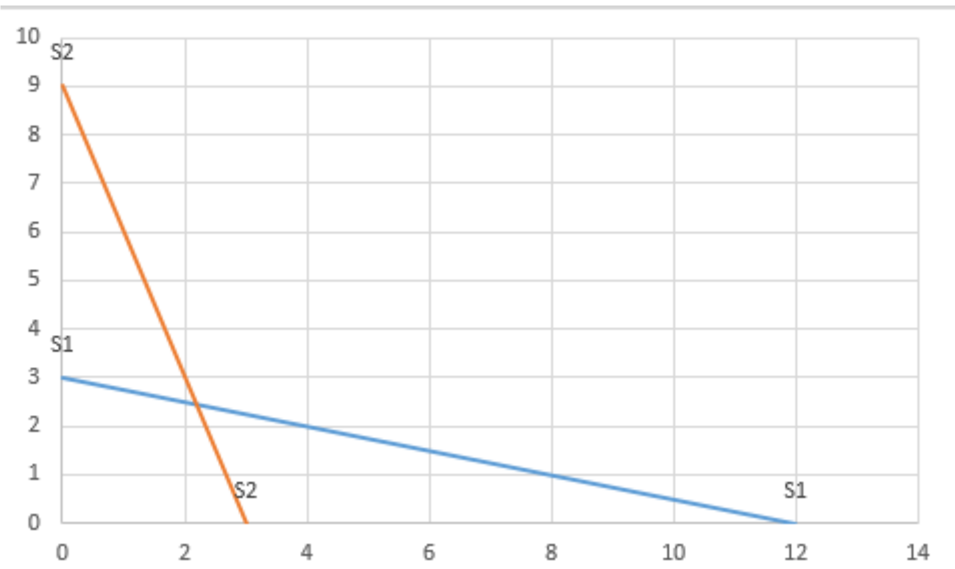
Sljedeći korak je priprema za grafičko prikazivanje restrikcija kako bi ih mogli prikazati na grafu, za to ih je potrebno upisati kao koordinate u grafu

PRIPREMA ZA GRAFIČKO PRIKAZIVANJE RESTRIKCIJA					
	x1	x2	x1	x2	
S1	0	3	12	0	
S2	0	9	3	0	

Slika 15. Grafičko prikazivanje restrikcija Izvor: podatke odredio autor

Kako bi došli do koordinata u tablici, vanjske vrijednosti varijabli odlučivanja x1 i x2 postavljene su kao 0, te se računaju unutarnje vrijednosti tako da se dijeli vrijednost restrikcije sa pripadajućom vrijednosti varijable odlučivanja, te se dobivaju rezultati prikazani na slici 15.

Nakon toga, potrebno je uvrstiti restrikcije u graf, kako bi mogli izračunati dopušteno područje, te moguće točke rješenja.



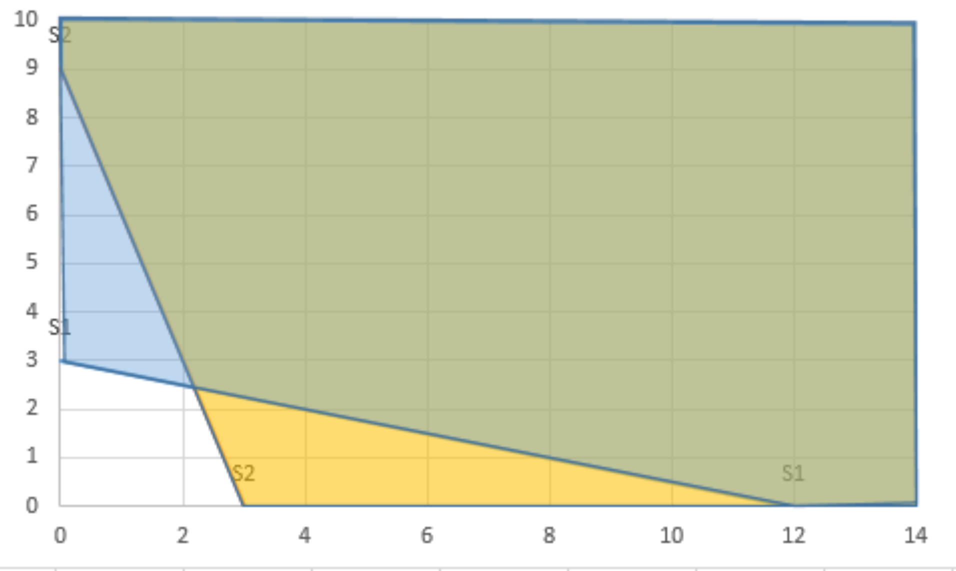
Slika 16. Graf restrikcija Izvor: podatke odredio autor

Kako bi se izračunalo dopušteno područje u kojemu se optimalno rješenje nalazi, potrebno je uvrstiti kontrolnu točku proizvoljnih koordinata, u ovom slučaju uzete su koordinate 0, 0 , te su njene vrijednosti stavljene u formule restrikcija, kako bi se pokazalo s koje strane restrikcija se dopušteno područje nalazi. Ukoliko je restrikcija zadovoljena umetanjem koordinata kontrolne točke, ona se nalazi u dopuštenom području restrikcije.

ODREĐIVANJE DOPUŠTENOG PODRUČJA									
KONOTROLNA TOČKA			0	0					
S1		1	x1	+	4	x2	≤	12	
			0				≤	12	TOČNO
S2		3	x1	+	1	x2	≤	9	
			0				≤	9	TOČNO

Slika 17. Određivanje dopuštenog područja Izvor: podatke odredio autor

Nakon unosa kontrolne točke vidljivo je kako se točke kod obje restrikcije nalaze u dopuštenom području grafa, što nam govori da se dopuštena područja obje restrikcije nalazi ispod linije restrikcije na grafu, te samim time možemo odrediti točno dopušteno područje, te moguće točke rješenja koje ga omeđuju.



Slika 18. Grafički prikaz dopuštenog područja Izvor: podatke odredio autor

Dopušteno područje nalazi se u bijeloj boji , te predstavlja područje u kojemu je optimalno rješenje moguće.

U sljedećem koraku potrebno je izračunati moguće točke rješenja, one točke koje se nalazi na osima grafa, mogu se pročitati iz grafa.

Nakon što su točke pročitane iz grafa, zapisuju se u tablicu, kako bi se mogle ubaciti u formulu funkcije cilja, kako bi se došlo do vrijednosti funkcija cilja u pojedinoj točki.

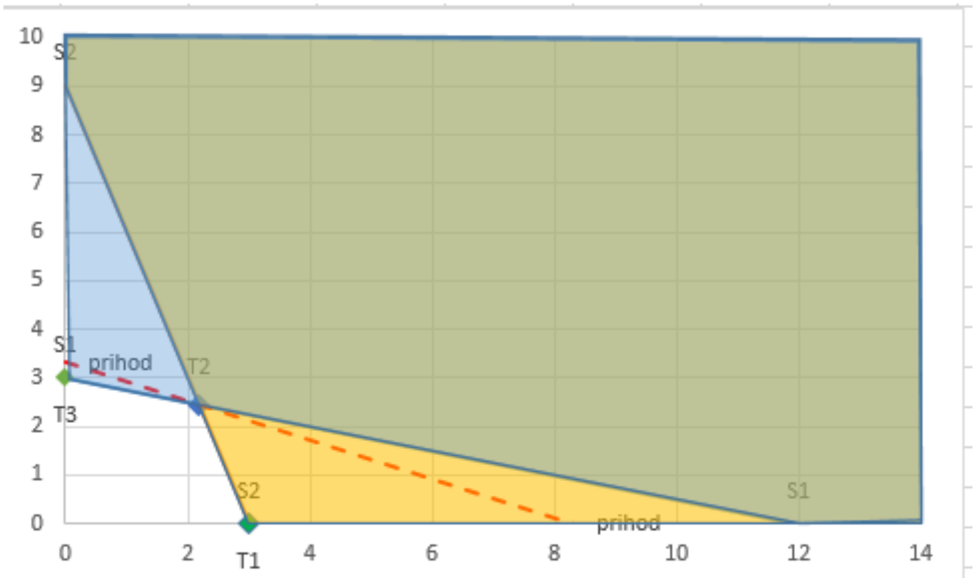
VRIJEDNOST FUNKCIJE CILJA ZA MOGUĆE TOČKE RJEŠENJA							
max	prihod		2	x1	+	5	x2
T1	3	0	6				
T2	2,18	2,45	16,64				
T3	0	3	15				
MAX VRIJEDNOST FUNCKIJE CILJA				16,64			

Slika 19. Računanje funkcije cilja Izvor: podatke odredio autor

Uvidom u rezultate funkcije cilja u pojedinoj mogućoj točki rješenja, maksimalna vrijednost profita nalazi se u točki T2, te se ona uzima kao optimalno rješenje ovog zadatka. Kada se dobije optimalno rješenje funkcije cilja, potrebno je izračunati točne koordinate funkcije cilja, te ju uvrstiti u graf.

PRIKAZIVANJE FUNCKIJE CILJA NA GRAFU									
max	prihod		2	x1	+	5	x2	=	16,64
			x1	x2	x1	x2			
			0	3,33	8,32	0			

Slika 20. Prikazivanje funkcije cilja na grafu Izvor: podatke odredio autor



Slika 21. Završni izgled grafa Izvor: podatke odredio autor

Krivulja maksimalnog prihoda prikazana je crvenom bojom te je iscrtana.

Posljednji korak rješavanja zadatka s grafičkom metodom je provjeravanje iskorištenosti kapaciteta strojeva, uvrštavanjem vrijednosti optimalnog rješenja u formule ograničenja postavljenih u samom zadatku, ukoliko je količina rada stroja u satima jednak postavljenoj restrikciji, stroj je u potpunosti iskorišten.

ISKORIŠTENOST KAPACITETA									
S1		1	x1	+	4	x2	≤	12	
				12			≤	12	KAPACITETI SU U POTPUNOSTI ISKORIŠTENI
S2		3	x1	+	1	x2	≤	9	
				9			≤	9	KAPACITETI SU U POTPUNOSTI ISKORIŠTENI

Slika 22. Iskorištenost kapaciteta Izvor: podatke odredio autor

U ovom primjeru oba stroja su u potpunosti iskorištena.

4.3. Primjena u stvarnom svijetu

Linearno programiranje ima široku primjenu u ekonomiji, osobito u situacijama gdje je potrebno optimizirati resurse i donositi odluke unutar zadanih ograničenja. U ekonomskom kontekstu, koristi se za poboljšanje proizvodnih procesa, smanjenje troškova, maksimiziranje profita i učinkovito upravljanje resursima (Sekhon & Bloom, 2016.). Primjeri primjene uključuju utvrđivanje optimalne količine proizvoda koji bi trebali biti proizvedeni kako bi se postigla maksimalna dobit, uzimajući u obzir proizvodne troškove i kapacitete. Također, linearno programiranje olakšava analizu tržišnih uvjeta, raspodjelu resursa te strateško planiranje i odlučivanje u poslovanju (Sekhon & Bloom, 2016.). Ova metoda omogućuje ekonomistima i menadžerima da modeliraju i rješavaju složene probleme s više ograničenja i varijabli, što poboljšava efikasnost i konkurentnost organizacija. Primjena linearnog programiranja u stvarnom svijetu se koristi svuda kako bi se optimizirali ponajviše profiti vodećih kompanija u mnogim industrijama, od naftne industrije do avio kompanija, svi su prilagodili svoj rad rezultatima i sugestijama koje su dobili korištenjem linearnog programiranja. Također, primjena metoda linearnog programiranja uvelike se koristi i u upravljanju „hedge“ fondova i drugih vrsta fondova u cilju povećanja njihovog investirajućeg portfolija i upravljanja istim.

Uzimajući za primjer, Bridgewater Associates, jedan od najvećih i najuspješnijih „hedge“ fondova na svijetu, koristi sofisticirane kvantitativne modele, uključujući linearno programiranje, za optimizaciju svojih investicijskih portfelja. Strategija fonda "Pure Alpha" uvelike se oslanja na preciznu raspodjelu imovine kako bi se postigla ravnoteža između rizika i povratac. Pomoću linearnog programiranja, Bridgewater sustavno analizira različite opcije raspodjele imovine kako bi pronašao optimalni portfelj koji ispunjava ciljeve povrata uz pridržavanje postavljenih ograničenja rizika (Dalio, 2017.). Primjena linearnog programiranja omogućuje „Bridgewater Associatesu“ dosljedno ostvarivanje visokih povrata za svoje investitore uz učinkovito upravljanje rizikom. Preciznost linearnog programiranja omogućuje fondu da se uspješno nosi sa složenim tržišnim uvjetima i učinkovito raspoređuje kapital, osiguravajući da je portfelj dobro diverzificiran i usklađen sa strateškim ciljevima fonda. Ovaj primjer pokazuje kako se linearno programiranje koristi u financijskom sektoru za rješavanje stvarnih izazova optimizacije portfelja, pomažući investicijskim menadžerima poput Bridgewatera da donose informirane odluke temeljene na podacima kako bi maksimizirali povrat i kontrolirali rizik.

Nadalje, „Royal Dutch Shell“, vodeća svjetska naftna i plinska kompanija, intenzivno koristi linearno programiranje u svojim rafinerijskim operacijama. Primjenom linearnog programiranja Shell može odrediti optimalnu mješavinu sirovih ulja i pročistiti ih na najisplativiji način. To im omogućuje prilagodbu fluktuirajućim cijenama sirove nafte, promjenama u potražnji proizvoda i različitim operativnim troškovima, čime se maksimizira profitabilnost. Murty G. (2020.), smatra da upotrebom linearnog programiranja, rafinerije nafte poput Shella mogu uštedjeti milijune dolara godišnje optimiziranjem svojih operacija. Sposobnost dinamičnog odgovora na tržišne uvjete uz osiguravanje usklađenosti s propisima naglašava snagu linearnog programiranja u donošenju ekonomskih odluka u stvarnom svijetu.

Ova primjena linearnog programiranja u optimizaciji rafinerija najbolji je primjer kako matematičko modeliranje može dovesti do značajne ekonomske učinkovitosti u velikim industrijskim procesima.

Prema Christopher M. (2022.), „Walmart“ je odličan primjer tvrtke koja koristi linearno programiranje za unapređenje svoje distribucijske mreže. Tvrtka primjenjuje napredne modele linearnog programiranja kako bi pronašla najisplativiji način za distribuciju proizvoda iz svojih brojnih distribucijskih centara u maloprodajne trgovine. Ova optimizacija pomaže Walmartu da osigura stalnu opskrbu na policama dok istovremeno smanjuje troškove transporta i skladištenja. Primjenom linearnog programiranja, Walmart uspijeva ostvariti značajne uštede u troškovima svog opskrbnog lanca. Efikasno upravljanje transportnim i skladišnim resursima omogućava tvrtki da održava konkurentne cijene i poboljšava zadovoljstvo kupaca (Christopher, 2022.). Korištenje linearnog programiranja pomaže Walmartu da se nosi sa složenim logističkim izazovima i optimizira svoju opsežnu distribucijsku mrežu. Ova praksa pokazuje kako linearno programiranje može biti primijenjeno na stvarne probleme u opskrbnim lancima, čime se poboljšava operativna učinkovitost i smanjuju troškovi u velikim maloprodajnim sustavima.

Također, avio – kompanije poput „Delta Air Lines“ koriste linearno programiranje i druge tehnike optimizacije za raspoređivanje svojih letova i upravljanje flotom. Operacije Delte uključuju složene probleme planiranja, uključujući optimizaciju vremena letenja, raspored posade i iskorištenost zrakoplova kako bi se povećala učinkovitost i smanjili troškovi (Kotas, 2022.). Primjenom linearnog programiranja, Delta Air Lines može učinkovito uravnotežiti operativne troškove s kvalitetom usluge, osiguravajući da su letovi učinkovito raspoređeni i resursi optimalno iskorišteni (Kotas, 2022.). U praksi, linearno programiranje se primjenjuje za modeliranje i rješavanje problema koji uključuju određivanje broja letova na određenim rutama, odabir odgovarajućih tipova zrakoplova za te rute, kao i optimalno raspoređivanje pilota i kabinskog osoblja. Pritom se poštuju zakonska ograničenja, poput maksimalnog radnog vremena i potrebnih razdoblja odmora. U situacijama kada dođe do poremećaja u rasporedu zbog lošeg vremena ili tehničkih poteškoća, linearno programiranje pomaže u brzom preuređivanju letova, smanjujući tako kašnjenja i otkazivanja (Kotas, 2022.). Ovaj pristup pomaže Delti smanjiti nepotrebne operativne troškove i poboljšati opće zadovoljstvo korisnika. Ovaj primjer pokazuje kako se linearno programiranje koristi u zrakoplovnoj industriji za rješavanje zamršenih izazova rasporeda i pojednostavljenje operacija, u konačnici povećavajući učinkovitost i profitabilnost.

5. Zaključak

Autor je proveo dubinsko istraživanje i analizu metoda za rješavanje problema linearnog programiranja, posebno se fokusirajući na njihovu upotrebu u ekonomiji, te praktično prikazao primjenu u programu Microsoft Excell. Linearno programiranje, kao ključna tehnika u matematičkoj optimizaciji, igra značajnu ulogu u rješavanju složenih problema s višestrukim ograničenjima i objektivnim funkcijama koje zahtijevaju optimalnu raspodjelu resursa. Rad je ispitao dvije primarne metode za rješavanje problema linearnog programiranja: grafičku metodu i simpleks metodu. Iako je grafička metoda jednostavna i prikladna za probleme koji uključuju dvije varijable, njena je korisnost ograničena zbog nemogućnosti rješavanja složenijih problema s većim brojem varijabli. Nasuprot tome, simpleks metoda, koju je razvio George Dantzig, pokazala se kao robusna i svestrana tehnika, učinkovita za rješavanje problema s mnogo varijabli i ograničenja. Primjeri navedeni u radu naglašavaju praktičnu korisnost ovih metoda. Simpleks metoda posebno je vrijedna u poslovnim i ekonomskim kontekstima, kao što su optimizacija proizvodnje, distribucija, upravljanje zalihama i financijsko planiranje. Iako se rjeđe koristi u praksi, grafička metoda je korisna za razumijevanje temeljnih principa linearnog programiranja i služi kao obrazovni resurs za podučavanje osnova optimizacije. Ukratko, linearno programiranje i dalje je bitan alat u modernom gospodarstvu, omogućujući analitičarima i menadžerima da donose dobro informirane odluke na temelju matematičke optimizacije. Stalni napredak i poboljšanja ovih metoda, zajedno s napretkom računalne tehnologije, dodatno će povećati njihovu učinkovitost i primjenjivost u sve složenijim ekonomskim sustavima.

LITERATURA

Barković, D., (2001). Operacijska istraživanja. Osijek: Ekonomski fakultet u Osijeku

Brajdić, I., (2000). Operacijska istraživanja u ekonomiji i osnove teorije linearnog programiranja. Sagta, Opatija.

Babić, Z., (2005). Linearno programiranje. Split: Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu.

Bertsimas, D., & Tsitsiklis, J. N. (1997). Introduction to Linear Optimization. Athena Scientific.

Šimunović K., Havrlišan S., (2019). Primjena linearnog programiranja u strojarstvu. Slavonski Brod: Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu.

Dalio, R., (2017). Principles: Life and Work. Avid Reader Press / Simon & Schuster.

Beasley, J. D., (n.d.). Linear programming – sensitivity analysis – using Solver, Burnel University, dostupno na : https://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/lpsens_solver.html.

Murty, K. G., (2020). Models for Optimum Decision Making: Crude Oil Production and Refining. Springer

Christopher, M., (2022). Logistics & Supply Chain Management. Pearson Education

Dantzig, G. B., (1998). Linear programming and Extensions. Princeton University Press.

Sekhon, R. & Bloom, R., (2016). Applied Finite Mathematics, De Anza College.

Kotas, J., (2022). A linear programming model for airline schedule recovery after disruption, Inderscience, dostupno na : https://www.inderscienceonline.com/doi/pdf/10.1504/IJOR.2022.127146

TABLICA SLIKA