Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera
Ekonomski fakultet u Osijeku
Sveučilišni prijediplomski studij Ekonomija i poslovna ekonomija

Luka Papišta

# SIMPLEKS METODA ZA RJEŠAVANJE MODELA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Završni rad

Osijek, 2024

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Ekonomski fakultet u Osijeku

Sveučilišni prijediplomski studij Ekonomija i poslovna ekonomija

Luka Papišta

# SIMPLEKS METODA ZA RJEŠAVANJE MODELA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Završni rad

**Kolegij: Kvantitativne metode za poslovno odlučivanje**

JMBAG: 0010233818

e-mail: lpapista@efos.hr

Mentor: prof. dr. sc. Martina Briš

Osijek, 2024

Josip Juraj Strossmayer University of Osijek
Faculty of Economics and Business in Osijek
University Undergraduate Study Programme Economics and Business

Luka Papišta

# A simplex method for solving linear programming models

Final paper

Osijek, 2024

**IZJAVA**
**O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI,**
**PRAVU PRIJENOSA INTELEKTUALNOG VLASNIŠTVA,**
**SUGLASNOSTI ZA OBJAVU U INSTITUCIJSKIM REPOZITORIJIMA**
**I ISTOVJETNOSTI DIGITALNE I TISKANE VERZIJE RADA**

1. Kojom izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je završni(navesti vrstu rada: završni/diplomski/specijalistički/doktorski) rad isključivo rezultat osobnoga rada koji se temelji na vlastitim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu. Potvrđujem poštivanje nepovredivosti autorstva te točno citiranje radova drugih autora i referiranje na njih.
2. Kojom izjavljujem da je Ekonomski fakultet u Osijeku, bez naknade u vremenski i teritorijalno neograničenom opsegu, nositelj svih prava intelektualnoga vlasništva u odnosu na navedeni rad pod licencom *Creative Commons Imenovanje – Nekomercijalno – Dijeli pod istim uvjetima 3.0 Hrvatska.*
3. Kojom izjavljujem da sam suglasan/suglasna trajnom pohranjivanju i objavljivanju mog rada u Institucijskom digitalnom repozitoriju Ekonomskoga fakulteta u Osijeku, Repozitoriju Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku te javno dostupnom Repozitoriju Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (u skladu s odredbama Zakona o visokom obrazovanju i znanstvenoj djelatnosti, NN 119/2022).
4. Izjavljujem da sam autor/autorica predanog rada i da je sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti istovjetan s dovršenom tiskanom verzijom rada predanom u svrhu obrane istog.

**Ime i prezime studenta/studentice:** Luka Papišta

**JMBAG:** 0010233818

**OIB: 5**4171299467

**e-mail za kontakt:** l.papista@gmx.com

**Naziv studija:** Sveučilišni prijediplomski studij Ekonomija i poslovna ekonomija

**Naslov rada:** Simpleks metoda za rješavanje modela linearnog programiranja

**Mentor/mentorica rada:** prof. dr. sc. Martina Briš

U Osijeku, 2024.godine

Potpis Luka Papišta

## Simpleks metoda za rješavanje modela linearnog programiranja


## SAŽETAK

Ovim završnim radom, u sklopu kolegija *Kvantitativne metode za poslovno odlučivanje* istražuje se simpleks metoda za rješavanje modela linearnog programiranja te njena primjena u pogledu poslovnog odlučivanja. U radu su obrađena operacijska istraživanja, teorijska podloga linearnog programiranja, povijest linearnog programiranja te njezine ključne odrednice i matematičke formulacije. Linearno programiranje predstavlja kombinaciju matematike i ekonomije. Simpleks metoda upravo prikazuje jedan od najpraktičnijih modela linearnog programiranja. U radu je prikazan praktičan primjer programa proizvodnje sa ciljem minimizacije troškova. U primjeru se optimizira proizvodnja daljinskih upravljača tipa A i tipa B, definirani su materijali potrebni za proizvodnju te radni sati. Za rješavanje praktičnog primjera linearnog programiranja, korišten je Excelov alat Solver. Solver je alat koji na brz i jednostavan način pronalazi optimalno rješenje. Važno je postaviti funkciju cilja, varijable i ograničenja programa. Naglasak primjera temelji se na optimizaciji resursa i smanjenju troškova proizvodnje proizvodnog programa daljinskih upravljača. Kod rješavanja praktičnog primjera, dobiveno je cjelobrojno i necjelobrojno rješenje. Kako bi rješenje bilo praktičnije i realističnije, odabire se cjelobrojno rješenje. Kvantitativnim metodama te ovim praktičnim primjerom, mnoga poduzeća mogu primijeniti ovu metodu u svojim svakodnevnim poslovnim pothvatima i procesima. Metoda je posebice primjenjiva u optimiziranju resursa, smanjenju troškova ili maksimiziranju profita i dobiti. Ovaj rad temelji se na znanstvenoj i stručnoj literaturi.



**Ključne riječi:** simpleks metoda, linearno programiranje, Excel Solver, optimizacija, operacijska istraživanja

# A simplex method for solving linear programming models


## ABSTRACT

The simplex approach for solving linear programming models and its application to business decision-making are the subjects of this article, which was written as a part of the course Quantitative Methods for Business Decision-Making. The subject matter of the study includes mathematical formulations, operations research, linear programming theory, history, and essential components. Economics and mathematics are combined in linear programming, and one of the most applicable models of linear programming is shown by the simplex approach. The thesis presents a real-world example of a manufacturing program with the objective of minimizing costs. By specifying the resources required for production and the working hours, the practical example maximizes the production of Type A and Type B remote controllers. The practical case was solved using the Excel Solver function. The Solver is a tool that discovers the best solution quickly and simply. Configuring the variables, the objective function and the program limitations is essential. The remote control manufacturing program's resource optimization and savings measures are presented in the example. The practical problem was solved in a way that produced both integer and non-integer solutions. The integer answer has been chosen in order to make the solution simpler and more realistic. Multiple businesses may integrate this approach into regular business operations and procedures via quantitative methods and this practical example. This method is very useful for reducing expenses, profit-maximizing, and resource optimization. The scientific and professional literature acts as a foundation for this thesis.



**Keywords:** simplex method, linear programming, Excel Solver, optimization, operations research

# SADRŽAJ

# 1. Uvod

Za rješavanje problema koji zahtijevaju određivanje najboljeg rješenja u okviru zadanih ograničenja, potrebne su optimizacijske metode. U prošlosti, optimizacijskim metodama koristila se vojska za potrebe optimalnih odluka u rješavanju kompleksnih problema. U vrijeme drugog svjetskog rata, operacijska istraživanja koristila su se za optimiziranje vojnih resursa i logistike.

Jedno od najvažnije korištenih optimizacijskih metoda je linearno programiranje. Simpleks metoda predstavlja metodu linearnog programiranja. U nastavku rada prikazana je primjena simpleks metode, specifičnosti modela, kao i praktični primjer optimizacije problema. Za menadžment, optimizacijske metode poput simpleks metode, pružaju odličan alat za učinkovito i efikasno donošenje odluka, optimiziranje određenih resursa, maksimiziranje profita i minimiziranje troškova.

## 1.1. Struktura rada

Završni rad je formiran od šest poglavlja. Prvo poglavlje prikazuje uvod završnoga rada. Drugo poglavlje predstavlja teorijsku podlogu i prethodna istraživanja. Prikazana je teorijska podloga operacijskih istraživanja, linearnog programiranja, simpleks metode i Excelova alata Solver. U trećem poglavlju opisana je metodologija istraživanja koja je podijeljena na predmet istraživanja, cilj istraživanja i metode istraživanja. Četvrto poglavlje predstavlja opis istraživanja i rezultate istraživanja Prikazan je praktičan primjer na "ručni" način, a potom je primjer riješen koristeći Excelov alat Solver. Peto poglavlje predstavlja raspravu. Šesto poglavlje predstavlja zaključak. Kraj rada sadrži literaturu, popis slika i tablica.

# 2. Teorijska podloga i prethodna istraživanja

Ovo poglavlje sadrži temeljne pojmove za razumijevanje rada.

## 2.1. Operacijska istraživanja

"Operacijska istraživanja (OI) nastoje odrediti najbolji (optimalni) smjer aktivnosti u problemu odlučivanja u okviru danih restrikcija i ograničenih kapaciteta. Termin operacijska istraživanja vrlo je često, gotovo isključivo, pridružen korištenju matematičkih metoda u modeliranju i analizi problema odlučivanja." (Barković, 2001:1).

Prema Rama Murthy (2007), operacijska istraživanja predstavljaju dio matematike koju koristi menadžment. Svaki menadžer pri donošenju odluke razmatra sve segmente odluke, tako da rješenje bude korisno u svim segmentima. Menadžment se može smatrati procesom integracija napora jedne svrhovite grupe ili organizacije, čiji članovi imaju barem jedan isti cilj. Dvije najvažnije škole koje koriste naučnu osnovu za donošenje odluka su:

1. Škola odlučivanja ili teorija odluke
2. Škola kvantitativnog mjerenja ili matematička teorija.

Navedene škole podržavaju korištenje matematičkih metoda ili kvantitativnih metoda za donošenje odluka. Kvantitativni pristup zahtijeva da problemi donošenja odluka budu definirani, analizirani i riješeni na svjestan, racionalan, logičan, sistematičan i naučan način.

Prema Barković (2001), operacijska istraživanja koristila su se istraživačkom odjelu ministarstva zrakoplovstva Velike Britanije u razdoblju od 1937-1939 u istraživanjima primjene radara u zračnoj obrani. Kasnije su razvijene matematičke analize rješavanja vojnih problema odlučivanja, poput rješavanja problema konvoja, što prikazuje optimalnu količinu pratnje u vrijeme drugog svjetskog rata

Prema Hillier i Lieberman (2010), operacijska istraživanja su imala značajan utjecaj na poboljšanje efikasnosti brojnih organizacija širom svijeta. Operacijska istraživanja su dala značajan doprinos u povećanju produktivnosti ekonomija raznih zemalja.

Carter, Price i Rabadi (2019) ističu kako se operacijska istraživanja bave donošenjem odluke, te da je donošenje odluka ljudski proces podržan intuicijom i činjenicama. Ističu kako je potrebna sustavna metodologija i matematički modeli koji se mogu analizirati jasno razumljivim metodama i algoritmima. Iskustvo u modeliranju uspješno potvrđuje rješavanje problema raznim matematičkim modelima, međutim konačne odluke i akcije donose ljudi čiji je cilj dobrobit organizacije i ljudi u njoj.

"Deset je temeljnih načela dobrog modeliranja:

1. Ne izrađivati kompliciran model ako i jednostavan može poslužiti!
2. Ne podešavati problem kako bi odgovarao tehnici rješavanja!
3. Rigorozno stvarati zaključak o modelu!
4. Provjeriti model prije uporabe!
5. Model ne shvaćati previše doslovno!
6. Ne očekivati da model rješava i probleme za koje nije projektiran!
7. Ne pretjerivati s „prodavanjem“ istog modela!
8. Već sama izrada modela znatno pridonosi rasvjetljavanju problema!
9. Model ne može dati rješenje koje je bolje od ulaznih informacija!
10. Ni jedan model ne može zamijeniti onoga koji na kraju donosi odluku!" (Plazibat, 2015:4-5).

### 2.2. Linearno programiranje

Barković (2001) ističe kako metode linearnog programiranja trenutno predstavljaju jedan od najvažnijih instrumenata operacijskih istraživanja. Linearno programiranje predstavlja jednu disciplinu matematičkog optimiranja. Šimunović i Havrlišan (2019) ističu kako se pojam linearnog programiranja veže uz Leonida Kantorovića - začetnika linearnog programiranja, koji je s ekonomistom Tjallingom Koopmansom osvojio 1975. godine Nobelovu nagradu za ekonomiju i doprinos u optimalnom raspoređivanju resursa. Hillier i Lieberman (2010) ističu kako je razvoj i napredak linearnog programiranja od 1950-ih godina izuzetan te da ono danas predstavlja jedan standardan alat za mnogobrojne tvrtke i poduzeća, uštedjevši im tisuće ili milijune dolara.

Pavlović (2005) navodi kako je linearno programiranje sustavan pristup koji rješava problem. Hillier i Lieberman (2010) ističu kako je najčešći tip primjene linearnog programiranja raspodjela resursa, no linearno programiranje ima i druge praktične primjene. "Modeli linearnog programiranja karakterizirani su linearnim jednadžbama i nejednadžbama, od kojih neke predstavljaju funkciju, a neke ograničenja." (Barković, 2001:9). Pavlović (2005) ističe kako je za razumijevanje i rješavanje modela linearnog programiranja potrebno poznavanje linearne algebre, uključujući linearne vektorske prostore i matrice.

2.2.1. Formiranje programa

Kako bi formirali program, potrebno je odrediti tri ključne odrednice: funkciju cilja, ograničenja i uvjet nenegativnosti. One se prema Pavlović (2005) mogu zapisati na slijedeći način:

**Funkcija cilja**

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ (minimum/maksimum)

gdje:

Z označava vrijednost funkcije cilja,

$c_i$ označava koeficijente proporcionalnosti funkcije cilja iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$,

$x_i$ označava promjenjive varijable koje daju ekstremne vrijednosti funkcije cilja iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$.

**Restrikcije (ograničenja)**

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n \leq = \geq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n \leq = \geq b_2$

.

.

.

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n \leq = \geq b_m$

gdje:

$a_{ij}$ označavaju koeficijente proporcionalnosti uz varijable u ograničenjima iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$,

$b_i$ označavaju slobodne članove ograničenja sa desne strane ograničenja iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$,

*m* označava broj ograničenja,

*n* označava broj promjenjivih varijabli.

**Uvjet nenegativnosti**

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

Prema Šimunović i Havrlišan (2019), nakon prikupljenih podataka i definiranog problema, problem se može analizirati na nekoliko pitanja kojim se olakšava opisivanje problema.

**1. O čemu se odlučuje?**

Najvažnije je pogledati o čemu se treba odlučiti, kako se definiraju varijable te kako one utječu na funkciju cilja i na ograničenja.

**2. Što je cilj?**

Svaki problem može imati više ciljeva, poput maksimizacije profita, minimizacije troškova ili optimizacije korištenja resursa. Predmet optimiranja zapisuje se na slijedeći način:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \ (Max/Min)$$

**3. Što ograničava?**

Ograničenja predstavljaju granice unutar kojih varijable odluke mogu varirati, a predstavljaju ograničenja u vremenu, kapacitetima, dostupnim resursima i slično.

U ekonomiji mnoge veličine i odnosi uglavnom nisu linearne, no ako su približno linearne, tada će precizni matematički aparat nadoknaditi tu nelinearnost upotrebom višeg broja varijabli, koje ne bi bile moguće u nelinearnim modelima (Pavlović, 2005).

## 2.3. Pretpostavke modela

Hillier i Lieberman (2010) ističu određene pretpostavke modela:

**Proporcionalnost:**

Proporcionalnost se odnosi na funkciju cilja i funkcionalna ograničenja. Doprinos svake aktivnosti vrijednosti funkcije cilja Z, proporcionalan je razini aktivnosti $x_j$, što je prikazano terminom $c_j x_j$ u funkciji cilja.

**Aditivnost:**

Aditivnost govori kako svaka funkcija u modelu predstavlja zbroj individualnih doprinosa odgovarajućih aktivnosti.

**Djeljivost:**

Varijable odluke nisu ograničene samo na cjelobrojne vrijednosti, već mogu imati bilo koje vrijednosti, koje zadovoljavaju funkcionalna i ograničenja nenegativnosti. Aktivnosti se mogu izvoditi na frakcijskim razinama.

**Izvjesnost:**

Svaka vrijednost dodijeljena svakom parametru modela linearnog programiranja pretpostavlja se kao poznata konstanta.

Sasvim je uobičajeno da u stvarnim primjerima linearnog programiranja gotovo niti jedna od pretpostavki nije u potpunosti zadovoljena. Važno je da tim operacijskih istraživanja analizira koliko su odstupanja velika. U slučaju velikog odstupanja, savjetuje se korištenje nekih drugih modela.

## 2.4. Simpleks metoda

Simpleks metodu je razvio prof. George Dantzig 1947. godine, a predstavlja kraću analitičku metodu za veći broj varijabla. "To je iterativna analitička metoda koja preispituje korak po korak (i to samo osnovna moguća rješenja), a svaki sljedeći korak je poboljšanje prethodnog i približavanje optimalnom rješenju." (Šimunović i Havrlišan, 2019:34).

Prema Brajdić (2012), simpleks metoda predstavlja kompromis između dvije krajnosti:

a) potreba za optimalnim rješenjem u jednom koraku

b) potreba za ispitivanjem svih baričnih rješenja (radi stvarnog određivanja optimalnog rješenja)

Prema Luenberger i Ye (2008), ovaj pristup fokusira se na pojedinačne varijable te njihov odnos prema sustavu. Vjerojatno predstavlja najjednostavniji pristup linearnog programiranja, no nije jednostavno izražen u kompaktnoj formi. "Međutim, za veće probleme, standardna simplex metoda računski je složenija i zahtijeva puno aritmetičkih operacija te se standardna simplex metoda poboljšava i modificira, tako da danas već postoje razne varijante metode" (Šimunović i Havrlišan, 2019:35).

Brajdić (2012) ističe da ukoliko simpleks metoda nudi: alternativna određivanja barem jednog mogućeg rješenja, alternativu provjere je li određeno rješenje optimalno ili ne, alternativu za kreiranje novog plana koji je bliži optimalnom rješenju u izboru optimalnog rješenja; može u okviru konačnog broja koraka dobiti optimalno rješenje za formulirani zadatak.

Prema Šimunović i Havrlišan (2019), koraci simpleks metode su slijedeći:

**1. Pretvorba matematičkog modela u kanonski oblik**

Nejednadžbe se pretvaraju u jednadžbe primjenom dopunskih i umjetnih varijabla. Umjetne varijable koriste se samo ako dopunske varijable imaju negativnu vrijednost.

**2. Određivanje maksimum/minimum funkcije cilja**

Prvo osnovno moguće rješenje se oblikuje i unosi u prvu simpleks tablicu. Prva simpleks tablica zapravo prikazuje preslikan sustav jednadžbi u matričnom (vektorskom) obliku. Prva simpleks tablica prikazuje najnepovoljnije rješenje za zadani problem.

**3. Izbor varijable za ulazak/izlazak iz baze**

U bazu ulazi varijabla koja brže poboljšava funkciju cilja, a izlazi ona varijabla koja za prirast ulazne varijable prva padne na nulu (uvjet nenegativnosti).

**4. Računanje vrijednosti za slijedeću simpleks tablicu**

Nakon izbora ulazne i izlazne varijable, računaju se vrijednosti za slijedeću simpleks tablicu, a računa se prema slijedećoj formuli:

$$Novi\ a_{ij} = Stari\ a_{ij} - \frac{(vrijednost\ u\ značajnom\ retku)\ \cdot\ (vrijednost\ u\ značajnom\ stupcu)}{vrijednost\ na\ sjecištu\ značajnog\ retka\ i\ stupca}$$

2.4.1. Primjer simplex modela

Na slijedećem primjeru prikazat će se način rješavanja matematičkog modela simplex metodom za određivanje maksimuma funkcije cilja. Ovaj problem se još naziva i standardnim problemom maksimuma. Problem linearnog programiranja je zadan kako je prikazano:

**Tablica 1.** Prikaz tehnoloških i ekonomskih podataka

| Vrijeme obrade, v.j./kom | Proizvod P1 | Proizvod P2 | Raspoloživo vrijeme, v.j. |
|---|---|---|---|
| Stroj S1 | 32 | 20 | 27850 |
| Stroj S2 | 15 | 25 | 15600 |
| Stroj S3 | 12 | 30 | 13650 |
| Dobit, n.j./kom. | 800 | 1080 | |

Izvor: Izrada autora prema Šimunović i Havrlišan (2019)

Ovom tablicom prikazani su dva proizvoda za proizvodnju (P1 i P2), tri stroja (S1, S2, S3) i očekivana dobit po jedinici proizvoda. Za promatrano vremensko razdoblje, kod proizvoda P2, utvrđeno je da se može prodati najviše 150 komada na tržištu.

Funkcija cilja:

$$Max\ Z = 800x_1 + 1080x_2$$

Ograničenja:

$$32x_1 + 20x_2 \leq 27850\ (S1)$$
$$15x_1 + 25x_2 \leq 15600\ (S2)$$
$$12x_1 + 30x_2 \leq 13650\ (S3)$$
$$x_2 \leq 150\ (tržište)$$

Uvjet nenegativnosti:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

"Matematički model treba pretvoriti u kanonski oblik, dodavanjem dopunskih varijabla označenih s y" (Šimunović i Havrlišan, 2019:38).

Funkcija cilja:

$$Max\ Z = 800x_1 + 1080x_2$$

Ograničenja:

$$32x_1 + 20x_2 + y_1 = 27850\ (S1)$$
$$15x_1 + 25x_2 + y_2 = 15600\ (S2)$$
$$12x_1 + 30x_2 + y_3 = 13650\ (S3)$$
$$x_2 + y_4 = 150\ (S4)$$

Uvjet nenegativnosti:

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Prema Šimunović i Havrlišan (2019), vrijednost dopunskih varijabli $y_1, y_2\ i\ y_3$ prikazuje koliko manje vremenskih jedinica strojevi rade u odnosu na maksimalno raspoloživo vrijeme strojeva. Ukoliko njihove vrijednosti iznose 0, tada su strojevi u potpunosti iskorišteni (zauzeti). Dopunska varijabla $y_4$ govori koliko manje proizvoda P2 se može ponuditi tržištu u odnosu na maksimalnu količinu. Dopunske varijable ne smanjuju niti povećavaju funkciju cilja.

**Tablica 2.** Prva simplex tablica

| *cj* | | | 800 | 1080 | 0 | 0 | 0 | 0 | *xB0/aij* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *cB* | *xB* | *xB0* | P1 | P2 | y1 | y2 | y3 | y4 | |
| 0 | y1 | 27850 | 32 | 20 | 1 | 0 | 0 | 0 | 27850/20=1392,5 |
| 0 | y2 | 15600 | 15 | 25 | 0 | 1 | 0 | 0 | 15600/25=624 |
| 0 | y3 | 13650 | 12 | 30 | 0 | 0 | 1 | 0 | 13650/30=455 |
| 0 | y4 | 150 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 150/1=150 |
| *zj-cj* | | *0* | -800 | -1080 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Izvor: Izrada autora prema Šimunović i Havrlišan (2019)

U ovoj tablici nalazi se najnepovoljnije rješenje gdje je dobit jednaka nuli. Strojevi su u potpunosti neiskorišteni, stoga funkcija cilja u prvoj simplex tablici iznosi 0. Svakom slijedećom tablicom funkcija cilja će se poboljšavati do svoje maksimalne vrijednosti.

**Tablica 3.** Druga simplex tablica

| *cj* | | | 800 | 1080 | 0 | 0 | 0 | 0 | *xB0/aij* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *cB* | *xB* | *xB0* | P1 | P2 | y1 | y2 | y3 | y4 | |
| 0 | y1 | 24850 | 32 | 0 | 1 | 0 | 0 | -20 | 24850/32=776,56 |
| 0 | y2 | 11850 | 15 | 0 | 0 | 1 | 0 | -25 | 11850/15=790 |
| 0 | y3 | 9150 | **12** | 0 | 0 | 0 | 1 | -30 | 9150/12=762,5 |
| 1080 | P2 | 150 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 150/0=∞ |
| *zj-cj* | | *162000* | -800 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1080 | |

Izvor: Izrada autora prema Šimunović i Havrlišan (2019)

Vidljivo je kako je ulaskom P2 s vrijednošću 150 povećana vrijednost funkcije cilja s 0 na 162.000.

**Tablica 4.** Treća simplex tablica

| *cj* | | | 800 | 1080 | 0 | 0 | 0 | 0 | *xB0/aij* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *cB* | *xB* | *xB0* | P1 | P2 | y1 | y2 | y3 | y4 | |
| 0 | y1 | 450 | 0 | 0 | 1 | 0 | -2,66 | 60 | 450/60=7,5 |
| 0 | y2 | 412,5 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1,25 | 12,5 | 412,5/12,5=33 |
| 800 | P1 | 762,5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,083 | -2,5 | - |
| 1080 | P2 | 150 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 150/1=150 |
| *zj-cj* | | *772000* | 0 | 0 | 0 | 0 | 66,7 | -920 | |

Izvor: Izrada autora prema Šimunović i Havrlišan (2019)

Vidljivo je kako je ulaskom P1 s vrijednošću 800 povećana vrijednost funkcije cilja s 162.000 na 772.000. Vidljivo je kako je moguće dodatno povećati funkciju cilja jer postoji negativna vrijednost.

**Tablica 5.** Četvrta simplex tablica - optimalno rješenje

| *cj* | | | 800 | 1080 | 0 | 0 | 0 | 0 | *xB0/aij* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *cB* | *xB* | *xB0* | P1 | P2 | y1 | y2 | y3 | y4 | |
| 0 | y1 | 7,5 | 0 | 0 | 0,0166 | 0 | -0,044 | 1 | |
| 0 | y2 | 318,75 | 0 | 0 | -0,208 | 1 | -0,69 | 0 | |
| 800 | P1 | 781,25 | 1 | 0 | 0,41 | 0 | -0,027 | 0 | |
| 1080 | P2 | 142,5 | 0 | 1 | -0,016 | 0 | 0,044 | 0 | |
| *zj-cj* | | *778900* | 0 | 0 | 310,72 | 0 | 25,92 | 0 | |

Izvor: Izrada autora prema Šimunović i Havrlišan (2019)

Vrijednost funkcije cilja je poboljšana sa 772.000 na 778.900, čime je postupak završen, ostvareno je optimalno rješenje.

## 2.5. Solver

Plazibat (2015) navodi kako se problemi linearnog programiranja mogu rješavati uz pomoć Excelova alata Solver. Alat omogućuje riješiti problem linearnog programiranja na jednostavan način. U alatu, moguće je unijeti do 200 varijabla i do 500 ograničenja.

Prema Hillier i Lieberman (2010), važno je postaviti tri ključna pitanja za postavljeni problem.

*Koje odluke treba donijeti?* Brzina proizvodnje (npr. broj serija proizvoda).

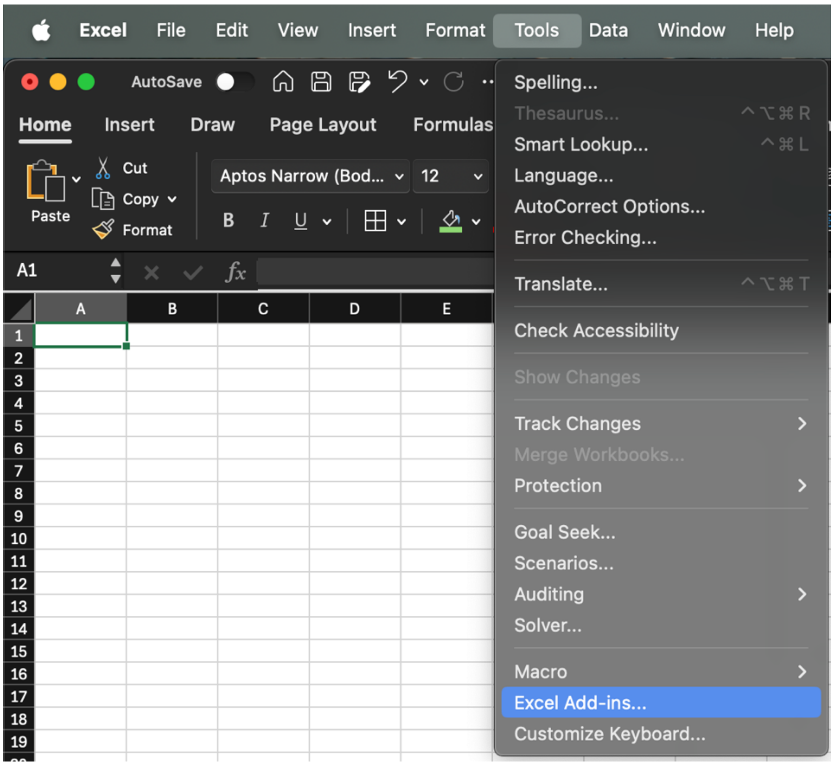
*Koja su ograničenja odluka?* Ograničenje predstavlja broj dostupnih radnih sati.

*Koja je mjera učinkovitosti za odluke?* Minimiziranje ili maksimiziranje.

### 2.5.1. Instaliranje alata

Prema Plazibat (2015), Excelov alat Solver se nalazi unutar skupine *Add-ins* alata. Ukoliko se Solver tamo ne nalazi, potrebno ga je aktivirati (instalirati), nakon čega će se pojaviti na kartici *Data.*

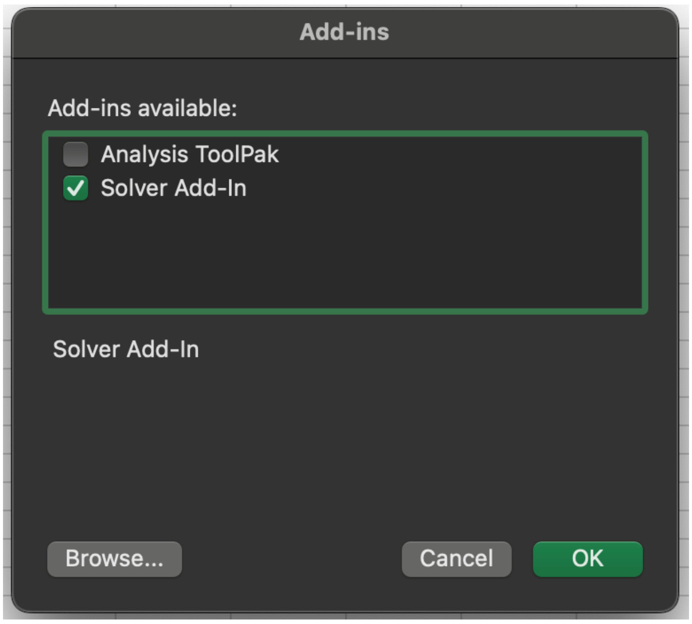
**Slika 1.** Aktiviranje alata Solver




Izvor: izrada autora

U Excelu, odabrati *Tools*, pa nakon toga *Excel Add-ins.*

**Slika 2.** Excel Add-ins dijaloški okvir




Izvor: izrada autora

Potrebno je kvačicom označiti *Solver Add-In*, pa kliknuti na *OK.* Nakon ovog postupka, Solver će biti aktiviran i moći će ga se pronaći u kartici *Data.*

# 3. Metodologija rada

## 3.1. Predmet istraživanja

Predmet istraživanja završnog rada je analiza i primjena simpleks metode za rješavanje modela linearnog programiranja. Na praktičnim primerima analizirat će se Excelov alat Solver u vidu rješavanja problema linearnog programiranja.

## 3.2. Cilj istraživanja

Cilj istraživanja je usmjeren na detaljno razumijevanje rješavanje problema linearnog programiranja uz pomoć simpleks metode. Također, cilj je istražiti primjenjivost Excelova alata Solver na praktičnom primjeru modela linearnog programiranja.

## 3.3. Metode istraživanja

Ovaj rad uključuje korištenje: deskriptivne metode, induktivne i deduktivne metode, metoda analize i sinteze, metoda klasifikacije, matematička metoda, metoda modeliranja, metoda kompiliranja (Macan, 2013).

# 4. Opis istraživanja i rezultati istraživanja

U ovom dijelu završnog rada prikazan je praktičan primjer za rješavanje problema linearnog programiranja koristeći se simpleks metodom. Cilj primjera je minimizacija troškova proizvodnje, a rješenje će se provjeriti uz pomoć Excelova alata Solver.

## 4.1. Opis programa proizvodnje

Poduzeće proizvodi dva modela daljinskih upravljača, model A i model B. Proizvodnja daljinskih upravljača zahtijeva tri ključne varijable: plastiku, bakar i trošak rada. U ovom dijelu rada, prikazani su iznosi pojedinih varijabli te njihov opis. Cilj ovog primjera je minimizirati troškove proizvodnje. U slijedećoj tablici, prikazane su varijable i troškovi potrebni za proizvodnju daljinskih upravljača.

**Tablica 6.** Klasifikacija varijabli

| Varijable | Vrste daljinskih upravljača | | Opis | Mjerna jedinica |
|---|---|---|---|---|
| | Tip A | Tip B | | |
| Plastika | 2,15 | 1,75 | trošak po seriji (1000 komada) | $m^3$ |
| Bakar | 2,55 | 1,05 | trošak po seriji (1000 komada) | t |
| Sati rada | 1 | 3 | trošak po seriji (1000 komada) | h |

Izvor: izrada autora

## 4.2. Matematička formulacija

U matematičkom modelu proizvodnje prikazana je funkcija cilja koja se treba minimizirati, ograničenja dostupnih resursa za proizvodnju i potrošnju te uvjet nenegativnosti koji osigurava da varijable ne budu negativne, što bi bilo nelogično u stvarnim programima proizvodnje.

Funkcija cilja:

$$\text{Min } Z=1800x_1+2200x_2$$

Ograničenja:

$$2{,}15x_1+1{,}75x_2\geq 194$$

$$2{,}55x_1+1{,}05x_2\geq 204$$

$$1x_1+3x_2\geq 160$$

Uvjet nenegativnosti:

$$x_1,x_2\geq 0$$

### 4.3. Program proizvodnje

U ovom dijelu završnoga rada opisane su varijable, odnosno dostupni resursi te njihovi iznosi potrebni za proizvodnju dva modela daljinskih upravljača. Ovaj program koristi se s ciljem minimiziranja troškova proizvodnje. Na **Slici 3.** moguće je vidjeti program proizvodnje u Excelu.

**Slika 3.** Program proizvodnje prikazan u Excelu

| | Daljinski upravljač | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Tip A | Tip B | | |
| | x1 | x2 | | |
| Trošak | 1800 | 2200 | Min | |
| Plastika | 2,15 | 1,75 | ≥ | 194 |
| Bakar | 2,55 | 1,05 | ≥ | 204 |
| Sati rada | 1 | 3 | ≥ | 160 |

Izvor: izrada autora

Iz slike je moguće zaključiti kako je za proizvodnju daljinskog upravljača tipa A potrebno izdvojiti jedan sat rada, 2,15 $m^3$ plastike i 2,55 tona bakra. Za proizvodnju daljinskog upravljača tipa B potrebno je izdvojiti tri sata rada, 1,75 $m^3$ plastike i 1,05 tona bakra. Kako je cilj minimiziranje troškova proizvodnje, potrebno je pronaći optimalno rješenje uz minimalan trošak za tip A od 1800 NJ (novčanih jedinica) te za tip B minimalan trošak od 2200 NJ. Za program proizvodnje potrebno je upotrijebiti najmanje 194 $m^3$ plastike, 204 tone bakra i najmanje 160 radnih sati.

### 4.4. Pretvorba nejednadžbi u jednadžbe

Kao što je prikazano u matematičkoj formulaciji, sve tri restrikcije su zadane u obliku nejednadžbi. Njih je potrebno pretvoriti u jednadžbe dodavanjem dopunskih (umjetnih varijabli). Te varijable nemaju mogućnost izravnog dodavanja vrijednosti programu proizvodnje jer se pojavljuju sa koeficijentom 0.

Funkcija cilja:

$$\text{Min } Z=1800x_1+2200x_2$$

Ograničenja:

$$2{,}15x_1+1{,}75x_2-x_3+x_6=194$$

$$2{,}55x_1+1{,}05x_2-x_4+x_7=204$$

$$1x_1+3x_2-x_5+x_8=160$$

Uvjet nenegativnosti:

$$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\geq 0$$

Ovako prikazana formulacija programa proizvodnje može koristiti simpleks metodu za rješavanje problema minimizacije troškova.

### 4.5. Iteracije programa proizvodnje

U ovom dijelu završnog rada prikazana je prva iteracija programa proizvodnje te njezine daljnje iteracije. Svakom iteracijom osigurava se da rješenje bude sve bliže optimalnom rješenju. Optimalno rješenje postiže se kada su svi koeficijenti funkcije cilja nenegativni (x≥0).

#### 4.5.1. Prva iteracija

**Tablica 7.** Prva iteracija

| B | Cb | P | x1 | x2↓ | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | Q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1800 | 2200 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | |
| x6 | M | 194 | 2,15 | 1,75 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 110,86 |
| x7 | M | 204 | 2,55 | 1,05 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 194,29 |
| x8← | M | 160 | 1 | 3 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 53,33 |
| min | | 558M | 5,7M-1800 | 5,8M-2200 | -M | -M | -M | 0 | 0 | 0 | |

Izvor: izrada autora

U prvoj iteraciji, $x_2$ se odabire kao ulazna varijabla jer je koeficijent uz njega najnegativniji (5,8M-2200), odnosno povećanje $x_2$ bi najviše povećalo vrijednost funkcije cilja. Najmanji pozitivan količnik je Q=53,33 za $x_8$, pa $x_8$ predstavlja izlaznu varijablu.

4.5.2. Druga iteracija

**Tablica 8.** Druga iteracija

| B | Cb | P | x1↓ | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | Q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1800 | 2200 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | |
| x6← | M | 100,67 | 1,57 | 0 | -1 | 0 | 0,58 | 1 | 0 | -0,58 | 64,26 |
| x7 | M | 148 | 2,2 | 0 | 0 | -1 | 0,35 | 0 | 1 | -0,35 | 67,27 |
| x2 | 2200 | 53,33 | 0,33 | 1 | 0 | 0 | -0,33 | 0 | 0 | 0,33 | 160 |
| min | | 248,67M+117333,33 | 3,7M-1066,67 | 0 | -M | -M | 0,93M-733,33 | 0 | 0 | -1,93M+733,33 | |

Izvor: izrada autora

U drugoj iteraciji, $x_1$ se odabire kao ulazna varijabla jer je koeficijent uz njega najnegativniji (3,7M-1066,67), odnosno povećanje $x_1$ bi najviše povećano vrijednost funkcije cilja. Najmanji pozitivan količnik je Q=64,26 za $x_6$, pa $x_6$ predstavlja izlaznu varijablu.

4.5.3. Treća iteracija

**Tablica 9.** Treća iteracija

| B | Cb | P | x1 | x2 | x3↓ | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | Q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1800 | 2200 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | |
| x1 | 1800 | 64,26 | 1 | 0 | -0,64 | 0 | 0,37 | 0,64 | 0 | -0,37 | -100,67 |
| x7← | M | 6,64 | 0 | 0 | 1,4 | -1 | -0,47 | -1,4 | 1 | 0,47 | 4,73 |
| x2 | 2200 | 31,91 | 0 | 1 | 0,21 | 0 | -0,46 | -0,21 | 0 | 0,46 | 150 |
| min | | 6,64M+185872,34 | 0 | 0 | 1,4M-680,85 | -M | -0,47M-336,17 | -2,4M+680,85 | 0 | -0,53M+336,17 | |

Izvor: izrada autora

U trećoj iteraciji, $x_3$ se odabire kao ulazna varijabla jer je koeficijent uz njega najnegativniji (1,4M-680,85), odnosno povećanje $x_3$ bi najviše povećalo vrijednost funkcije cilja. Najmanji pozitivan količnik je Q=4,73 za $x_7$, pa $x_7$ predstavlja izlaznu varijablu.

### 4.5.4. Četvrta iteracija - optimalno rješenje

**Tablica 10.** Četvrta iteracija - optimalno rješenje

| B | Cb | P | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | Q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1800 | 2200 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | |
| x1 | 1800 | 67,27 | 1 | 0 | 0 | -0,45 | 0,16 | 0 | 0,45 | -0,16 | |
| x3 | 0 | 4,73 | 0 | 0 | 1 | -0,71 | -0,33 | -1 | 0,71 | 0,33 | |
| x2 | 2200 | 30,91 | 0 | 1 | 0 | 0,15 | -0,39 | 0 | -0,15 | 0,39 | |
| min | | 189090,91 | 0 | 0 | 0 | -485 | -563,64 | -M | -M+484,85 | -M+563,64 | |

Izvor: izrada autora

U četvrtoj iteraciji dobiveno je optimalno rješenje. U retku *min* nema negativnih vrijednosti, što govori da je ostvareno optimalno rješenje. Dopunske varijable $x_4$, $x_5$, $x_6$, $x_7$, $x_8$ nisu bazne te stoga iznose 0. Vrijednosti M uz dopunske varijable nemaju mogućnost utjecaja na optimalno rješenje te one nisu važne za optimalno rješenje.

Optimalne vrijednosti varijabli:

$x_1$= 67,27

$x_2$= 30,91

Min Z = 189090,91 NJ (novčanih jedinica)

## 4.6. Rješavanje pomoću Excelova alata Solver

U ovom poglavlju, prikazat će se postupak rješavanja zadanog primjera. Zadani problem moguće je prikazati na slijedeći način u Excelu.

**Slika 4.** Prikaz primjera u Excelu

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VARIJABLE ODLUČIVANJA | | | | | | | | | |
| | x1 | količina proizvedenih serija daljinskog upravljača | | | | Tip A | | | |
| | x2 | količina proizvedenih serija daljinskog upravljača | | | | Tip B | | | |
| | | Daljinski upravljač | | | | | | | |
| | | Tip A | Tip B | | | | | | |
| | | x1 | x2 | | | | | | |
| | Trošak | 1800 | 2200 | Min | | | | | |
| | Plastika | 2,15 | 1,75 | ≥ | 194 | | | | |
| | Bakar | 2,55 | 1,05 | ≥ | 204 | | | | |
| | Sati rada | 1 | 3 | ≥ | 160 | | | | |
| | Min Trošak | | 1800 | x1 | + | 2200 | x2 | | |
| RESTRIKCIJE (Ograničenja) | | | | | | | | | |
| | Plastika | | 2,15 | x1 | + | 1,75 | x2 | ≥ | 194 |
| | Bakar | | 2,55 | x1 | + | 1,05 | x2 | ≥ | 204 |
| | Sati rada | | 1 | x1 | + | 3 | x2 | ≥ | 160 |
| UVJET NENEGATIVNOSTI | | | | | | | | | |
| x1 | ≥ | 0 | | | | | | | |
| x2 | ≥ | 0 | | | | | | | |

Izvor: izrada autora

Nakon raspisanog programa u Excelu, radimo pripremu za rješavanje uz pomoć Solvera.

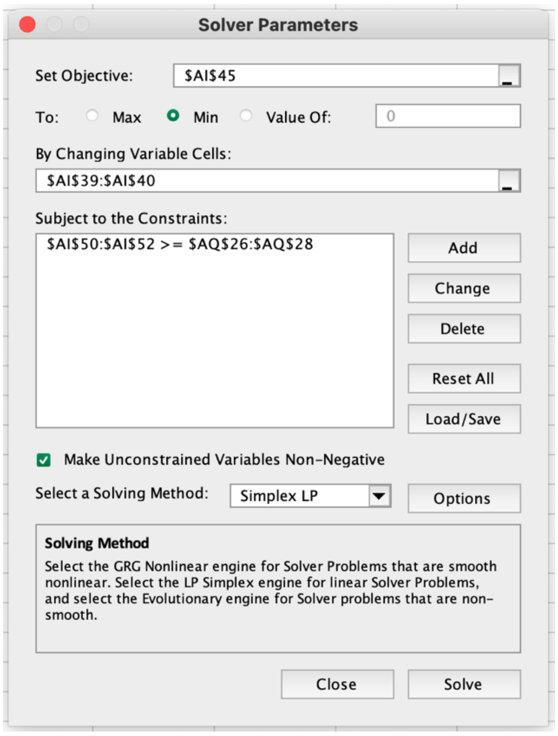
**Slika 5.** Priprema za rješavanje uz pomoć Solvera

| | | |
|---|---|---|
| VARIJABLE ODLUČIVANJA | | |
| x1 | | |
| x2 | | |
| FUNKCIJA CILJA | | |
| Min Trošak | | |
| RESTRIKCIJE ILI OGRANIČENJA | | |
| Plastika | | |
| Bakar | | |
| Sati rada | | |

Izvor: izrada autora

Nakon pripremljenog predloška, odlazimo na *Data* i odabiremo *Solver*. Na taj način pokrećemo alat.

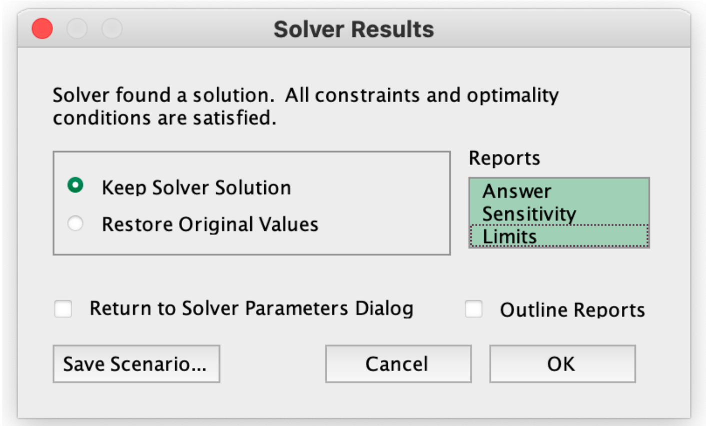
**Slika 6.** Određivanje parametara




Izvor: izrada autora

Pojavljuje se prozor *Solver Parameters,* gdje se u okvir *Set Objective* upiše adresa ćelije, odnosno polje kojom je označena funkcija cilja. Prema **Slici 5.**, odabiremo zeleno polje. U odjeljku *To*, izabiremo opciju *Min,* za minimiziranje troškova proizvodnje. U okvir *By Changing Variable Cells* potrebno je upisati polja varijabli ćelija koje označavaju varijable odlučivanja $x_1$ i $x_2$ (označeno žutom bojom). U okvir *Subject to the Constraints* klikom na *Add* dodajemo ograničenja (označena narančastom bojom) sa znakom veće ili jednako te brojevima sa desne strane kod restrikcija. Nakon odabranih ograničenja, potrebno je odabrati *Simplex LP* metodu za rješavanje. Klikom na Solve, pojavljuje se prozor:

**Slika 7.** Prozor Solver Results




Izvor: izrada autora

U ovom prozoru, za izvještaje potrebno je odabrati polja *Answer* (Izvješće o odgovoru), *Sensitivity* (Izvješće o osjetljivosti) i *Limits* (Izvješće o granicama). Klikom na *OK*, dobivaju se rješenja zadatka te njegovi izvještaji.

**Slika 8.** Konačno rješenje u Excelu

VARIJABLE ODLUČIVANJA

| | |
|---|---|
| x1 | 67,272727 |
| x2 | 30,909091 |

FUNKCIJA CILJA

| | |
|---|---|
| Min Trošak | 189090,91 |

RESTRIKCIJE ILI OGRANIČENJA

| | |
|---|---|
| Plastika | 198,72727 |
| Bakar | 204 |
| Sati rada | 160 |

ISPITIVANJE OGRANIČENJA

| Ograničenja | Rješenje oganičenja | Zaključak |
|---|---|---|
| 194 | 198,7272727 | Uvjet je zadovoljen |
| 204 | 204 | Uvjet je zadovoljen |
| 160 | 160 | Uvjet je zadovoljen |

Izvor: izrada autora

Na **Slici 8.** možemo vidjeti dobivena rješenja, te ispitivanje ograničenja. Možemo zaključiti kako su svi uvjeti zadovoljeni.

4.6.1. Izvješće o odgovoru - Answer Report

Izvješće o odgovoru podijeljeno je na tri dijela: *Objective Cell* (ciljna ćelija), *Variable Cells* (varijabilne ćelije) i *Constraints* (ograničenja).

**Tablica 11.** Izvješće o odgovoru - vrijednost funkcije cilja

Objective Cell (Min)

| Cell | Name | Original Value | Final Value |
|---|---|---|---|
| $C$9 | Funkcija cilja A | 0 | 189090,9091 |

Izvor: izrada autora

*Original Vaule* označava početnu vrijednost. Solver počinje sa početnom vrijednošću, a završava sa konačnom vrijednošću *Final Value*. Konačna vrijednost je rezultat tog procesa. S obzirom da se radi o cilju minimizacije, završna vrijednost će biti minimalna vrijednost koju Solver može ostvariti, odnosno minimalni trošak u ovom slučaju. Završna vrijednost iznosi 189.090,9091 NJ (novčanih jedinica).

**Tablica 12.** Izvješće o odgovoru - vrijednost varijabilnih ćelija

Variable Cells

| Cell | Name | Original Value | Final Value | Integer |
|---|---|---|---|---|
| $C$8 | Varijable A | 0 | 67,27272727 | Contin |
| $D$8 | Varijable B | 0 | 30,90909091 | Contin |

Izvor: izrada autora

Drugi dio okarakteriziran je podacima o varijablama odlučivanja. *Original Value* označava početno stanje varijabli,  a *Final Value* pokazuje konačne vrijednosti varijabli za koju je funkcija cilja ostvarila optimalnu vrijednost.

**Tablica 13.** Izvješće o odgovoru - ograničenja

Constraints

| Cell | Name | Cell Value | Formula | Status | Slack |
|---|---|---|---|---|---|
| $H$4 | ≥ ograničenja | 195,3636364 | $H$4>=$G$4 | Not Binding | 1,363636364 |
| $H$5 | ≥ ograničenja | 204 | $H$5>=$G$5 | Binding | 0 |
| $H$6 | ≥ ograničenja | 160 | $H$6>=$G$6 | Binding | 0 |

Izvor: izrada autora

U trećem dijelu izvještaja, nalaze se podaci o ograničenjima. U polju *Status*, možemo vidjeti stanje iskorištenosti proizvodnog pogona. Ograničenja koja imaju status *Binding* su u potpunosti iskorištena, ona ograničenja kod kojih piše *Not Binding*, u stupcu *Slack,* prikazuju kolika je rezerva preostala.

4.6.2. Izvješće o osjetljivosti - Sensitivity Report

Izvješće o osjetljivosti je podijeljeno na dva dijela: *Variable Cells* (varijabilne ćelije) i *Constraints* (ograničenja).

**Tablica 14.** Izvješće o osjetljivosti - vrijednost varijabilnih ćelija

Variable Cells

| Cell | Name | Final Value | Reduced Cost | Objective Coefficient | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$8 | Varijable A | 67,27272727 | 0 | 1800 | 3542,857143 | 1066,666667 |
| $D$8 | Varijable B | 30,90909091 | 0 | 2200 | 3200 | 1458,823529 |

Izvor: izrada autora

**Tablica 15.** Izvješće o osjetljivosti - ograničenja

Constraints

| Cell | Name | Final Value | Shadow Price | Constraint R.H. Side | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $H$4 | ≥ ograničenja | 195,3636364 | 0 | 194 | 1,363636364 | 1E+30 |
| $H$5 | ≥ ograničenja | 204 | 484,8484848 | 204 | 204 | 1,978021978 |
| $H$6 | ≥ ograničenja | 160 | 563,6363636 | 160 | 422,8571429 | 3,986710963 |

Izvor: izrada autora

Polje *Allowable Increase* nam prikazuje najveće moguće povećanje koeficijenata koje neće promijeniti osnovno rješenje primjera. Polje *Allowable Decrease* nam prikazuje najveće moguće smanjenje koeficijenata koje neće promijeniti osnovno rješenje primjera. Polje *Shadow Price* označava za koliko će se povećati vrijednost funkcije cilja ukoliko se ograničenje resursa poveća za jednu jedinicu.

4.6.3. Izvješće o granicama - Limits Report

**Tablica 16.** Izvješće o granicama

| Cell | Objective Name | Value |
|---|---|---|
| $C$9 | Funkcija cilja | 189090,9091 |

| Cell | Variable Name | Value | Lower Limit | Objective Result | Upper Limit | Objective Result |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$8 | x1 | 67,27272727 | 0 | 85 | 250 | 18835 |
| $D$8 | x2 | 30,90909091 | 0 | 110 | 398,5 | 20035 |

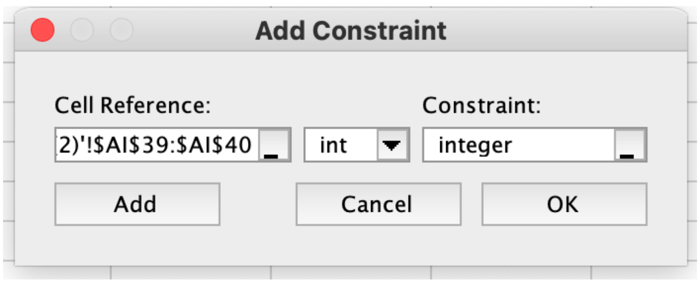
Izvor: izrada autora

U izvješću o granicama možemo vidjeti Stupce *Lower Limit* i *Upper Limit*, koji označavaju određene varijable odlučivanja koje se nalaze unutar izvedivog područja. Vidljivo je kako je uz varijeble $x_1$ (67,27272727) i $x_2$ (30,90909091) vrijednost funkcije cilja 189.090,9091 novčanih jedinica.

## 4.7. Cjelobrojno rješenje proizvodnog programa

Iako je u zadanom proizvodnom programu dopušteno necjelobrojno rešenje, ono nije moguće u stvarnosti. U ovom odlomku će se ispitati cjelobrojno rješenje proizvodnog programa. Za početak idemo na *Data* pa na *Solver*. Nakon toga se otvara dijaloški okvir *Solver Parameters*, gdje idemo na *Add.* Otvara se dijaloški okvir *Add Constraint* u kojem označavano naše varijable odlučivanja, a desno označavamo *int*, odnosno *integer* (cjelobrojno rješenje).

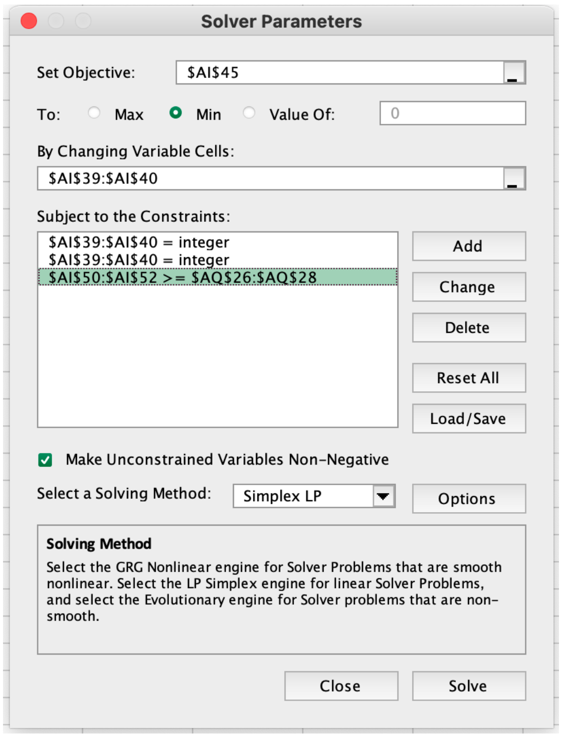
**Slika 9.** Integer dijaloški okvir




Izvor: izrada autora

Klikom na *OK* pojavljuje se ponovno dijaloški okvir *Solver Parameters*,

**Slika 10.** Solver Parameters dijaloški okvir




Izvor: izrada autora

Klikom na *Solve*, dobivamo cjelobrojno rješenje proizvodnog programa.

**Slika 11.** Cjelobrojno rješenje u Excelu

VARIJABLE ODLUČIVANJA

| | |
|---|---|
| x1 | 68 |
| x2 | 31 |

FUNKCIJA CILJA

| | |
|---|---|
| Min Trošak | 190600 |

RESTRIKCIJE ILI OGRANIČENJA

| | |
|---|---|
| Plastika | 200,45 |
| Bakar | 205,95 |
| Sati rada | 161 |

ISPITIVANJE OGRANIČENJA

| Ograničenja | Rješenje oganičenja | Zaključak |
|---|---|---|
| 194 | 200,45 | Uvjet je zadovoljen |
| 204 | 205,95 | Uvjet je zadovoljen |
| 160 | 161 | Uvjet je zadovoljen |

Izvor: izrada autora

Na slici je moguće vidjeti kako varijable odlučivanja na ovaj način imaju vrijednosti: $x_1$=68, $x_2$=31. Funkcija cilja iznosi 190.600,00 NJ (novčanih jedinica), što ukazuje na malu razliku između prvobitnog optimalnog rješenjea i cjelobrojnog rješenja. Na ovaj način, proizvodnja je nešto skuplja nego u prvobitnom rješenju. U ovom primjeru, svi zadani uvjeti su zadovoljeni.

## 5. Rasprava

U ovom završnom radu, prikazan je primjer rješavanja problema linearnog programiranja simpleks metodom. Praktičan primjer prikazuje program proizvodnje koji obuhvaća proizvodnju dvije vrste daljinskih upravljača, tipa A i tipa B. Funkcija cilja zadanog programa je minimiziranje troškova proizvodnje korištenjem simpleks metode. Dobiveni rezultati riješeni su ručnim računanjem, a uz ručno računanje korišten je i Excelov alat Solver. Excelov alat Solver na jednostavan i brz način daje optimalno rješenje zadanog problema, dopuštajući korisniku alata prilagodbu zadanog problema za određeni cilj. Kroz svaku iteraciju programa proizvodnje, moguće je uvidjeti značajno poboljšanje u vidu funkcije cilja. U izvješćima o odgovoru, osjetljivosti i granicama, moguće je detaljnije pogledati i razumjeti pojedina ograničenja i varijable, što je od velike koristi poduzećima. U ovom praktičnom primjeru vidljiva su dva ishoda optimalnog rješenja, necjelobrojno i cjelobrojno. U stvarnosti bi proizvodnja necjelobrojne količine daljinskih upravljača bila nelogična, pa se poduzeće mora odlučiti za opciju cjelobrojne proizvodnje. Kako je razlika u optimalnim rješenjima cjeobrojnog i necjelobrojnog rezultata mala, ona svakako povećava troškove proizvodnje. Tehnike i metode linearnog programiranja moguće je primijeniti u raznim industrijama i sektorima, a simpleks metoda predstavlja jedan od alata koji omogućuju rješavanje takve vrste problema. Temeljni nedostatak ove metode je potreba za promjenom na cjelobrojno rješenje koje u stvarnim poduzećima povećavaju troškove i otežavaju proizvodnju u određenim slučajevima.

Ovim istraživanjem može se uvidjeti da se korištenjem simpleks metodom može doći do značajnih ušteda u smislu troškova proizvodnje, a u drugim slučajevima i u vidu maksimiziranja dobiti ili profita. Linearno programiranje predstavlja jedno od najvažnijih i najboljih tehnika vezanih uz operacijska istraživanja. Glavni cilj svakog poduzeća je ostvariti uštede na svim područjima, a linearnim programiranjem moguće je pospješiti ekonomsku alokaciju već ionako ograničenih i/ili oskudnih resursa. Neke od ušteda mogu biti u vidu vremena rada, strojeva, sirovina, novca. Umjesto nepotrebne uporabe tih resursa, iste je moguće iskoristiti za aktivnosti ili poslovne pothvate koji bi pospješili konkurentsku prednost određenog poduzeća. Linearno programiranje ima raznolika područja primjene, a prvobitno je bila osmišljena za potrebe vojske. Vojska koristi linearno programiranje kako bi ostvarila uštede goriva vezano uz transport i alokaciju određenih resursa, za optimiziranje obrambenih strategija i u izboru oružanih sustava. Simpleks metodu moguće je primijeniti u poljoprivredi, omogućavajući poljoprivrednicima planiranje i alokaciju ograničenih resursa poput vode, zemlje i rada, kako bi ostvarili maksimalan profit i uštedjeli troškove. Primjenjivost linearnog programiranja vidljiva je i proizvodnji, bilo da se radi o programima proizvodnje, planiranju proizvoda, određivanju optimalne mješavine materijala ili za smanjivanje vremena rada. Pomoću linearnog programiranja moguće je ostvariti uštede u vidu zaposlenika, smanjivanjem broja potrebnih zaposlenika za određeni zadatak ili za izračun plaće. Glavna prednost simpleks metode je maksimiziranje iskorištenosti resursa, omogućujući poduzećima pregled i pomoć u smislu donošenja odluka za realistična rješenja. Jedno od najvažnijih prednosti je uvid i prepoznavanje zastoja gdje je određeni stroj maksimalno iskorišten, a ostali strojevi nisu aktivni, odnosno nisu iskorišteni. Upravo takav zastoj povećava troškove poduzeća. Glavni nedostatak linearnog programiranja je što svi ciljevi moraju biti mjerljivi, što u stvarnosti nije uvijek moguće. Određene aktivnosti ili parametri poput motivacije zaposlenika i vremenskih uvjeta ne mogu biti točno izmjereni. U rješavanju određenog problema, parametri moraju biti konstantni i poznati. Linearno programiranje ne uzima u obzir vanjske čimbenike ili nepredvidive situacije. Simpleks metodom moguće je riješiti samo određeni problem, dok je u stvarnosti ponekad potrebno riješiti više problema, što ovom tehnikom nije moguće. Područje linearnog programiranja i korištenje simpleks metode moguće je poboljšati uz korištenje raznih alata koji imaju mogućnost veće prilagodbe određenog problema, korištenjem raznih simulacija, testiranjem i pojednostavljivanjem programa. Također moguće je korištenje alata za automatizaciju određenih zadataka u programu te preraspodjelu viška resursa.

# 6. Zaključak

Ovim završnim radom prikazana je teorija linearnog programiranja kroz primjenu simpleks metode. Linearno programiranje, kao najvažniji dio operacijskih istraživanja, predstavlja tehniku čija je svrha pronaći optimalan ishod željene akcije u vidu danih ograničenja i funkcije cilja. Simpleks metoda predstavlja temeljnu metodu linearnog programiranja, primjenjivu u širokom spektru industrija. Ovu metodu moguće je koristiti u financijama, poljoprivredi, vojsci, proizvodnji i slično. Metoda omogućava rješavanje različitih problema linearnog programiranja, a funkcionira sa velikim brojem varijabli i ograničenja. Glavni cilj je pronaći optimalno rješenje u vidu maksimiziranja dobiti ili profita te minimiziranja troškova nekog poduzeća. Na taj način, ova metoda doprinosi optimalnoj raspodjeli ograničenih resursa i poboljšanju učinkovitosti. U rješavanju određenog problema moguće je koristiti Excelov alat Solver, koji na jednostavan i pristupačan način korisnicima alata pronalazi optimalno rješenje zadanog problema. Alat Solver podržava velik broj varijabli i ograničenja. Alat je moguće primijeniti u različitim problema i u mnogim industrijama. Rješavanjem određenog problema simpleks metodom, moguće je menadžerima poduzeća dati detaljan prikaz mogućih rješenja te moguća odstupanja od ograničenja. Detaljnim uvidom u izvještaje moguće je vidjeti koje stavke se mogu mijenjati i za koliko. Na taj način omogućava se određena fleksibilnost u rješavanju nekog konkretnog problema. U ovom radu, alat Solver korišten je za rješavanje problema proizvodnje. Cilj problema je minimizirati troškove proizvodnje daljinskih upravljača tipa A i tipa B. Izračunato je necjelobrojno i cjelobrojno optimalno rješenje. Necjelobrojno rješenje nije uvijek primjenjivo, pa je potrebno izračunati cjelobrojno rješenje radi konkretnih i realističnih rezultata. Kako bi se unaprijedila simpleks metoda i alat Solver, predlaže se integracija alata Solver u druge analitičke alate, čime bi se poboljšala primjena u stvarnim proizvodnim pogonima i poslovnoj praksi. Kako bi se unaprijedila ova metoda, ona zahtijeva veliku sposobnost u prilagodbi, napredne tehnike, softverske programe i adekvatno znanje. Simpleks metoda u svakom smislu predstavlja koristan alat za mnoge industrije, a njezine prednosti nadmašuju nedostatke. Sa daljnjim unaprjeđenjem, moguće je osigurati potrebu za budućim korištenjem ovog alata u širem rasponu industrija.

## Literatura


1. Barković, D. (2001). *Operacijska istraživanja.* Osijek: Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Ekonomski fakultet Osijek
2. Brajdić, I. (2013). *Matematički modeli i metode poslovnog odlučivanja*. Sveučilište u Rijeci. Fakultet za menadžment u turizmu i ugostiteljstvu.
3. Carter, M., Price, C. C., & Rabadi, G. (2019). *Operations research: a practical introduction*. Chapman and Hall/CRC. Dostupno na: https://nibmehub.com/opacservice/pdf/read/Operations%20Research%20A%20Practical%20Approach%20by%20Michael%20W.%20Carter-%202ed.pdf
4. Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2010). *Introduction to operations research*. Ninth Edition. McGraw-Hill Science, Engineering & Mathematics. Dostupno na: http://www.maths.lse.ac.uk/Personal/stengel/HillierLieberman9thEdition.pdf
5. Luenberger, D. G., & Ye, Y. (2008). *Linear and nonlinear programming* (Vol. 2). Reading, MA: Addison-wesley. Dostupno na: https://web.stanford.edu/class/msande310/310trialtext.pdf
6. Macan, B.(2013). *Metodologija.* Dostupno na: https://www.grf.unizg.hr/wpcontent/uploads/2021/12/Znanost_istrazivanje_i_metode.pdf
7. Pavlović, I. (2005). *Kvantitativni modeli i metode u poslovnom odlučivanju.* Mostar: Ekonomski fakultet Sveučilišta. – Dubrovnik: Sveučilište.
8. Plazibat, B., & Reić, L. (2015). *Operacijska istraživanja u MS Excelu.* Sveučilište u Splitu. Sveučilišni odjel za stručne studije. Dostupno na: https://www.oss.unist.hr/sites/default/files/file_attach/Operacijska%20istraživanja%20u%20MS%20Excelu%20-%20Bože%20Plazibat.pdf
9. Rama Murthy, P. (2007). *Operations Research.* India: New Age International (P) Limited. Dostupno na: https://www.bbau.ac.in/dept/UIET/EME-601%20Operation%20Research.pdf
10. Šimunović, K. i Havrlišan, S. (2019). *Primjena linearnog programiranja u strojarstvu.* Slavonski Brod: Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu.

## Popis tablica



## Popis slika