

# Upravljanje repovima čekanja

---

Sesar, Matija

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Economics in Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Ekonomski fakultet u Osijeku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:145:759862>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-05**



Repository / Repozitorij:

[EFOS REPOSITORY - Repository of the Faculty of Economics in Osijek](#)



Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Ekonomski fakultet u Osijeku

Diplomski studij (Poslovna ekonomija, smjer Menadžment)

Matija Sesar

## **UPRAVLJANJE REPOVIMA ČEKANJA**

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Ekonomski fakultet u Osijeku

Diplomski studij (Poslovna ekonomija, smjer Menadžment)

Matija Sesar

## **UPRAVLJANJE REPOVIMA ČEKANJA**

Diplomski rad

**Kolegij: Operacijski menadžment**

JMBAG: 0165065451

e-mail: sesar.matija@gmail.com

Mentor: Izv.prof.dr.sc. Martina Briš Alić

Osijek, 2020.

Josip Juraj Strossmayer University of Osijek

Faculty of Economics in Osijek

Graduate Study (Business Economics, course of study “Management”)

Matija Sesar


## **MANAGING WAITING LINES**

Graduate paper

Osijek, 2020.

## IZJAVA

### O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI, PRAVU PRIJENOSA INTELEKTUALNOG VLASNIŠTVA, SUGLASNOSTI ZA OBJAVU U INSTITUCIJSKIM REPOZITORIJIMA I ISTOVJETNOSTI DIGITALNE I TISKANE VERZIJE RADA

1. Kojom izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je \_\_\_\_\_ diplomski (navesti vrstu rada: završni / diplomski / specijalistički / doktorski) rad isključivo rezultat osobnoga rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu. Potvrđujem poštivanje nepovredivosti autorstva te točno citiranje radova drugih autora i referiranje na njih.
2. Kojom izjavljujem da je Ekonomski fakultet u Osijeku, bez naknade u vremenski i teritorijalno neograničenom opsegu, nositelj svih prava intelektualnoga vlasništva u odnosu na navedeni rad pod licencom *Creative Commons Imenovanje – Nekomercijalno – Dijeli pod istim uvjetima 3.0 Hrvatska*. 
3. Kojom izjavljujem da sam suglasan/suglasna da se trajno pohrani i objavi moj rad u institucijskom digitalnom repozitoriju Ekonomskoga fakulteta u Osijeku, repozitoriju Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku te javno dostupnom repozitoriju Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (u skladu s odredbama Zakona o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju, NN br. 123/03, 198/03, 105/04, 174/04, 02/07, 46/07, 45/09, 63/11, 94/13, 139/13, 101/14, 60/15).
4. izjavljujem da sam autor/autorica predanog rada i da je sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti istovjetan sa dovršenom tiskanom verzijom rada predanom u svrhu obrane istog.

**Ime i prezime studenta/studentice:** Matija Sesar

**JMBAG:** 0165065451

**OIB:** 95458318241

**e-mail za kontakt:** sesar.matija@gmail.com

**Naziv studija:** Diplomski sveučilišni studij Poslovna ekonomija, smjer Menadžment

**Naslov rada:** Upravljanje repovima čekanja

**Mentor/mentorica diplomskog rada:** Izv. prof. dr. sc. Martina Briš Alić

U Osijeku, \_\_\_\_\_ 2020. \_\_\_\_\_ godine

Potpis \_\_\_\_\_ Sesar Matija \_\_\_\_\_

# Upravljanje repovima čekanja

## SAŽETAK

Pojavom repova čekanja u mnogim djelatnostima, većina poduzeća ozbiljno promatra na repove kao problem. S druge strane, poduzeća u slučaju takve pojave imaju za cilj smanjiti ili ih pametno iskoristiti u svoju korist. Velik broj globalnih poduzeća uspijeva u svojim namjerama do te mjere, da klijenti uživaju čekati u repovima, a ustvari nisu ni svjesni toga. Svaki čovjek osjetio je što znači čekati u redu barem jednom u životu, a taj fenomen i dalje je vrlo čest u urbanim, zagušenim i visokotehnološkim društvima. Jednostavan je razlog zašto postoje repovi čekanja, potražnja za uslugama je veća nego što je ono dostupno za određenu uslugu. Usko povezano s time može biti problem manjka poslužitelja, odnosno nedovoljno sredstava da poduzeće osigura dodatnu razinu usluge ili jednostavno ne postoji dovoljno prostora za količinu usluge koja se pruža. Cilj ovog diplomskog rada je utvrditi karakteristike, važnost te analizirati repove čekanja i upravljati kvalitetno njima. Na temelju provedenih istraživanja može se utvrditi da velik broj poduzeća uopće nije u mogućnosti smanjiti repove čekanja te ni ne ustraju u tome. Upravo, takva poduzeća usmjerila su sve svoje resurse na podizanju kvalitete čekanja klijenata u redovima. U ovome radu detaljno je definiran i primjerom pokrijepljen svaki element repa čekanja, koji pomažu u razumijevanju i kasnijoj analizi repova čekanja. Klasifikacija modela repova čekanja provedena je kroz mnoštvo ilustracija, matematičkih proračuna te u konačnici izradom simulacijskog modela pomoću simulacijskog alata ARENA. Od iznimne je važnosti analiza i kvaliteta sustava repa čekanja, gdje se stječe uvid u mjere učinkovitosti repova, odnose troškova u sustavu, upravljanju ograničenjima i još mnogo toga.

**Ključne riječi:** rep čekanja, red, usluga, analiza, kvaliteta, trošak

## **Managing waiting lines**

### **ABSTRACT**

When the phenomenon of waiting line was arrive in many industries, most companies seriously observed the queues as a problem. On the other hand, companies in situation caused phenomenon aspire how to reach goals in the easiest way. Companies try to reduce them or use them wisely to their advantage. A lot of global companies are succeeding in their intentions, to the extent that customers enjoy waiting in lines, in fact that they are not even aware of it. Every person has felt what it means to wait in line at least once in a lifetime. This phenomenon is still very common in urban, congested and high-tech societies. There is a simple reason why there are queues; the demand for services is higher than available space for particular service. Closely related to this may be the problem of lack of servers. Companies don't have enough funds to provide an additional level of services or there isn't simply enough space for the amount of services it provides. The aim of this thesis is to determine the characteristics, importance and analyze the waiting queues and well manage them. Based on the conducted research, it can be established that a large number of companies aren't able to reduce the waiting lines at all and don't even insist on it. Exactly that is why companies have focused all their resources on raising the quality of customer waiting in lines. In this thesis, each element of the queue is defined in detail and supported by example, which help in knowledge and later analysis of the queues. The classification of the waiting line model was carried out through a multitude of illustrations, mathematical calculations and finally by creating a simulation model using the simulation tool ARENA. The analysis and quality of the waiting line system is extremely important, where vision is gained in measures of line efficiency, system cost ratios, constraint management and much more.

**Keywords: waiting line, queue, service, analysis, quality, cost**

# SADRŽAJ

<b>1. UVOD .....</b>	<b>1</b>
<b>2. Metodologija rada .....</b>	<b>2</b>
2.1. Predmet istraživanja .....	2
2.2. Metode istraživanja .....	2
2.3. Rezultati istraživanja .....	2
<b>3. Osnovno o repovima čekanja .....</b>	<b>3</b>
<b>4. Elementi u repu čekanja .....</b>	<b>7</b>
4.1. Izvor klijenata.....	8
4.2. Dolasci klijenata .....	10
4.3. Red čekanja.....	12
4.4. Odabir klijenata .....	15
4.5. Usluga i izlaz .....	18
<b>5. Klasifikacija sustava repova i terminologija .....</b>	<b>23</b>
<b>6. Analiza i kvaliteta sustava repa čekanja .....</b>	<b>30</b>
6.1. Mjere učinkovitosti .....	30
6.2. Tradicionalni odnos troškova.....	33
6.3. Kvaliteta i analiza troškova .....	35
6.4. Upravljanje ograničenjima.....	38
<b>7. Modeli repova čekanja .....</b>	<b>40</b>
7.1. Kombinirani dolasci i usluge .....	40
7.2. Osnovni Poissonov model .....	41
7.3. Specifični Poissonovi modeli repova i nepoissonovi repovi čekanja.....	44
<b>8. Model repa čekanja u simulacijskom programu ARENA .....</b>	<b>48</b>
8.1. Izrada simulacijskog modela repa čekanja.....	49
8.2. Rezultati simulacijskog modela repa čekanja .....	54



<b>9. ZAKLJUČAK.....</b>	<b>56</b>
<b>Literatura .....</b>	<b>58</b>
<b>Internetski izvori .....</b>	<b>59</b>
<b>Popis slika.....</b>	<b>60</b>
<b>Popis tablica .....</b>	<b>61</b>

## 1. UVOD

Repovi čekanja često su definirani kao zasebna teorija, a velik broj autora naziva repove čekanja fenomenom, odnosno pojavom. Danski matematičar, A.K. Erlang, prvi je objavio rad u kojem je iznio svoju teoriju repova čekanja, gdje je na temelju protoka informacija u telekomunikacijama utvrdio određene vjerojatnosti čekanja. Među određene vjerojatnosti, Erlang je iznio broj poziva koji čekaju te vremena čekanja kada je sustav u ravnoteži. Upravo, taj rad pobudio je veliki poticaj u tadašnje vrijeme i stvorio veliku osnovu za daljnji razvoj teorije repova čekanja. Repovi čekanja analiziraju se nizom matematičkim formula koje su time izazvali veliku popularnost upravo među znanstvenicima, posebice matematičarima. Teorija čekanja razvila se za pružanje modela u predviđanju sustava koji nastoje osigurati uslugu za slučajno nastale zahtjeve. Svaka osoba koja obavlja i najmanju kupovinu, može osjetiti neugodnosti čekanja u repu. Naravno, vrlo je bitno spoznati da nisu samo ljudi koji provode vrijeme čekajući u repovima, već dijelovi i proizvodi koji čekaju u redovima prije određenog proizvodnog procesa. Čekanje se odvija u gotovo svakom produktivnom procesu ili usluzi. Budući da je vrijeme koje ljudi i stvari čekaju u redu dragocjen resurs, smanjenje vremena čekanja važan je faktor upravljanja operacijama. Također, vrijeme čekanja postalo je značajnije zbog povećanog naglaska na kvaliteti, posebice u uslužnim operacijama. Poduzeća se usredotočuju na smanjenje vremena čekanja i time nastoje podići kvalitetu. Upravo, vodeći tom pretpostavkom, velik broj poduzeća smatra da je problem u povećanju broja poslužitelja. Svakako postoji mogućnost da je upravo to odgovor na njihove probleme, ali tu se odmah pojavljuje uzročno posljedična veza, gdje rastu troškovi s novim poslužiteljem. Treba biti vrlo oprezan s impulzivnim povećanjem broja poslužitelja, ne obazirući se previše na dodatne troškove koji s istima dolaze. Izuzev povećanja broja poslužitelja, mogući problem radi kojeg nastaju repovi čekanja može biti ograničenost prostorom. Jednostavno, određena poduzeća ne posjeduju dovoljno prostora i primorani su funkcionirati s repovima čekanja. Naravno, prostor nije jedini koji može biti problem, već i određena usluga koja se pruža. U pojedinim prostorima nekad ne bi bilo dovoljno ni puno više prostora ili poslužitelja, jer izvor klijenata je neograničen. U pojedinim prostorima jedino takve situacije se mogu držati unutar kontrole s određenim sustavima zabrane ulaska u prostor, kada se popuni dozvoljena kvota. Cilj diplomskog rada pobliže je upoznati repove čekanja, provesti analizu i kvalitetu troškova uz repove čekanja, te dobiti predodžbu o osnovnim karakteristikama i modelima repova, kao i upravljanju istima.

## **2. Metodologija rada**

### **2.1. Predmet istraživanja**

Predmet istraživanja ovog diplomskog rada je otkrivanje razloga i načina stvaranja repova čekanja u svakodnevnom životu. Upravo dobivanjem odgovora zašto se repovi stvaraju, dobivaju se informacije za učinkovitije upravljanje repovima čekanja, što je primarni cilj cijeloga rada. Za smanjivanje repova čekanja, postoji određen broj prikladnih metoda radi poboljšanja nastalih situacija. Razni menadžeri i velike korporacije stekle su znanja da određene repove jednostavno nije moguće smanjiti, već ulažu značajnija sredstva u kvalitetu čekanja u repu te kasnijem pružanju usluga.

### **2.2. Metode istraživanja**

Kroz cijeli rad ponajviše je korištena deskriptivna metoda radi preciznog opisivanja i analize sustava repova čekanja. Ključni pojmovi su također ponajviše obuhvaćeni deskriptivnom metodom, ali s elementima komparativne. Vrlo često je prisutna komparativna metoda kroz usporedbu više različitih modela, klasifikaciju, raznorazne elemente sustava repa čekanja i često navođene primjere. U diplomskom radu najviše su se koristili sekundarni podaci navedene literature i internetskih izvora, ali i primarni podaci, posebice u praktičnom dijelu simulacijskog modela.

### **2.3. Rezultati istraživanja**

Svrha i rezultati istraživanja za ovaj rad jesu definirati potrebe i mogućnosti upravljanja repovima čekanja. Vrlo važno je provesti adekvatnu analizu i kvalitetu upravljanja repova čekanja usko povezanu s ograničenjima i troškovima sustava. Primarni cilj predstavlja adekvatno upravljanje repovima čekanja, naravno u dozvoljenim granicama, kako bi se prikazala učinkovitost i isplativost primijenjenih metoda u stvarnome vremenu.

### 3. Osnovno o repovima čekanja

Sustav čekanja može se opisati kao klijenti koji dolaze po uslugu, čekaju uslugu ukoliko nije neposredna. Ako su klijenti čekali uslugu, napuštaju sustav nakon što su usluženi. Izraz "klijent" koristi se u općenitom smislu i ne podrazumijeva nužno ljudskog klijenta. Na primjer, klijent može biti automobil koji čeka poliranje, zrakoplov koji čeka u redu za polijetanje ili računalni program koji čeka da se pokrene. Primjera repova čekanja ima zaista mnogo i prisutni su svakodnevno. Kako bi se obuhvatilo više područja pojave repova čekanja, u tablici 1 prikazana su neka važnija i učestalija.

Sustav repa	Jedinice	Usluga
<b>Komercijala</b>		
Banka	Ljudi	Službenik u banci
Supermarket	Ljudi	Blagajnik
Stroj za prodaju	Ljudi	Stroj
Benzinska postaja	Ljudi, automobili	Crpka, poslužitelj
<b>Transport</b>		
Autocesta	Automobil	Prometni signal
Područje dokova	Kamioni ili brodovi	Zaposleno osoblje
Zračno pristanište	Zrakoplovi	Pista
Automobili u „čekanju“	Automobil	Parkiralište
Javni transport	Ljudi	
<b>Komunikacije</b>		
Telefon	Ljudi	Oprema, linije
<b>Poslovanje i industrija</b>		
Materijalno poslovanje	Sirovine, proizvodi	Konvejer
Kompjutorska oprema	Program	Računalo
Tipkanje	Pisma, papir	Tipkačica
<b>Društvo</b>		
Sudstvo	Slučajevi u parnicama	Suci
Zakonodavstvo	Objave	Pravnici
Zdravstvo	Ljudi	Liječnici, sestre, ambulante, kreveti

**Tablica 1.** Primjer sustava čekanja

**Izvor:** (Barković, 2001:399-400)

U području komercijalnih usluga, klijenti dobivaju uslugu na fiksnim mjestima poduzeća, ali i na mnogim drugim van fizičkog područja poduzeća, organizacije i sl. Klijenti, moguće je

uvidjeti i prema tablici 1., dolaze na fiksna mjesta poduzeća banaka, supermarketa, frizerskih salon, restorana i sl. Nasuprot fiksnih mjesta, postoje benzinske crpke gdje su automobili klijenti, serviseri kućanskih aparata koji putuju do klijenata, automati (poslužitelj je stroj) itd.

Rep čekanja je red klijenata koji čekaju uslugu od jednog ili više poslužitelja. Međutim, rep ne mora biti fizički red pojedinaca ispred poslužitelja. Poslužitelji se obično smatraju kao pojedinačne stanice na kojima klijenti dobivaju uslugu. Fitzsimmons i Fitzsimmons (2011) navode više situacija, a neke od njih su sljedeće:

1. Poslužitelji se ne moraju ograničiti na služenje jednog klijenta odjednom. Prijevozni sustavi poput autobusa, zrakoplova i dizala grupne su usluge.
2. Klijent ne mora uvijek putovati u uslužni objekt, u nekim sustavima poslužitelj zapravo dolazi do klijenta. Ovakva situacija se može vizualizirati gradskim službama poput vatrogasnih službi, policije, hitne pomoći i sl.
3. Usluga se može sastojati od serije faza čekanja ili složenije mreže čekanja.

U bilo kojem sustavu pružanja usluge formira se red kad god trenutna potražnja premaši postojeći kapacitet za usluživanje. To se događa kada su poslužitelji toliko zauzeti da klijenti koji dolaze ne mogu primiti trenutnu uslugu. Takva se situacija mora dogoditi u bilo kojem sustavu gdje su dolasci slučajni, a pružanje usluge u različitim vremenima. Čekanje je dio svačijeg života i može uključivati nevjerojatno puno vremena. Jedan najobičniji dan može uključivati čekanje na nekoliko jabuka (supermarket, tržnica), čekanje da se netko javi na telefon, čekanje da vam posluže jelo, čekanje dizala, čekanje odjave u hotelu, popis je preširok da se jednostavno može sve navesti.

„Redovi ili repovi se stvaraju na najrazličitijim mjestima, a njihovo neeliminiranje negativno se očituje i na poslovnost tvrtke koja vrši usluge, i na osobe koje neizravno ili izravno sudjeluju u repovima. Takve situacije su u svakom slučaju nepoželjne. Razmatranje problema repova čekanja svodi se na to da se optimaliziraju sredstva (mjesta usluga) koja susreću potražnju klijenata (subjekte čekanja).“ (Barković, 2011:237) Za kraće vrijeme čekanja klijenata u repovima, vrlo je popularan čimbenik sigurnosti, tj. proizvoljno rezervirano vrijeme 10,20 ili više postotaka usluga, nego što očekujemo da će ih biti. U slučaju kada su ljudi dio repova čekanja, često se ističu dogovori i narudžbe. Primjerice na pregled kod stomatologa ili liječnika, rezervacije stolova u restoranima itd. Takvim načinom se omogućava klijentima da dolaze u relativno jednakom razmaku, a isto tako smanje vrijeme čekanja. S porastom broja usluga u posljednjih nekoliko godina, repovi čekanja za klijente

postali su toliko rasprostranjeni da se postavlja pitanje da li je čekanje nužni dio usluge. U osnovi, redovi čekanja za klijente formiraju se jer menadžeri nisu osigurali dovoljno proizvodnih kapaciteta kako bi izbjegli redove čekanja. Osigurano je nedovoljno osoblja ili opreme za pružanje korisničkih usluga na zahtjev. Prekomjerni kapacitet mogao bi se pružiti u obliku obilja osoblja, objekata i opreme, ali operativni troškovi bi naglo porasli. S druge strane, ako se ne osigura dovoljno proizvodnih kapaciteta i klijenti predugo čekaju, možda se neće vratiti u određenu trgovinu, a kao rezultat ostaju veliki troškovi izgubljene dobiti. Operativni menadžeri obično pokušavaju uspostaviti ravnotežu između pružanja dovoljno osoblja i opreme kako bi redovi čekanja bile relativno kratki, da su klijenti iznimno zadovoljni, ali ne tako kratki da su operativni troškovi prekomjerni.

Prema Gaither (1999) karakteristike repova čekanja najčešće uzrokuju:

1. Obrasci dolazaka koji su neredoviti ili slučajni. Iako je možda poznat prosječan broj dolazaka u jedinici vremena, to se ne može točno znati za svako specifično razdoblje.
2. Vrijeme svake usluge je različito. Može biti poznato prosječno vrijeme usluge, no ono ne vrijedi za svaki slučaj.

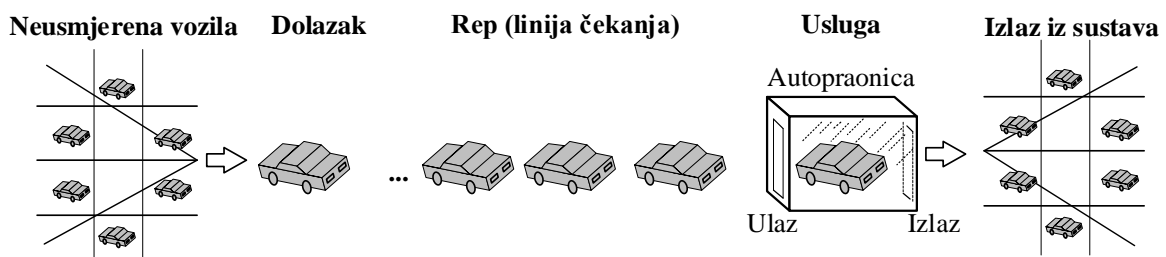
Situacije oko repova čekanja sastoje se od više modela i njihovih varijacija, odnosno nisu poput jednog modela i jednostavnog problema linearnog programiranja. Svaki model repova čekanja u stvarnosti ne teži najboljem i jedinstvenom rješenju, jer takav u pravilu ni ne postoji. Ponašanje repa čekanja nastoji se što bolje opisati koristeći parametre procjene, kao što su prosječno vrijeme čekanja po jedinici ili prosječno vrijeme trajanja usluge. Promjenom nekih od tih parametara dolazi se do raznih rezultata, a optimalno rješenje je ustvari ono koje menadžer smatra najrealnijim u pojedinom trenutku. Iz tog razloga modeli repova čekanja više se svrstavaju u deskriptivne modele, a ne normativne.

Vremena usluga su različita, odnosno obilježja su stohastička, a ne deterministička. Parametre nije moguće odrediti sa 100% sigurnosti te se definiraju kao distribucije vjerojatnosti. U modele dolaze kao prosječne ili očekivane vrijednosti, a ne kao realne komponente. Također, repovi se mogu opisati kao statični i nelinearni pod pretpostavkom da se parametri u vremenu ne mijenjaju. Promjene u operativnim karakteristikama nisu proporcionalne promjenama parametara modela.

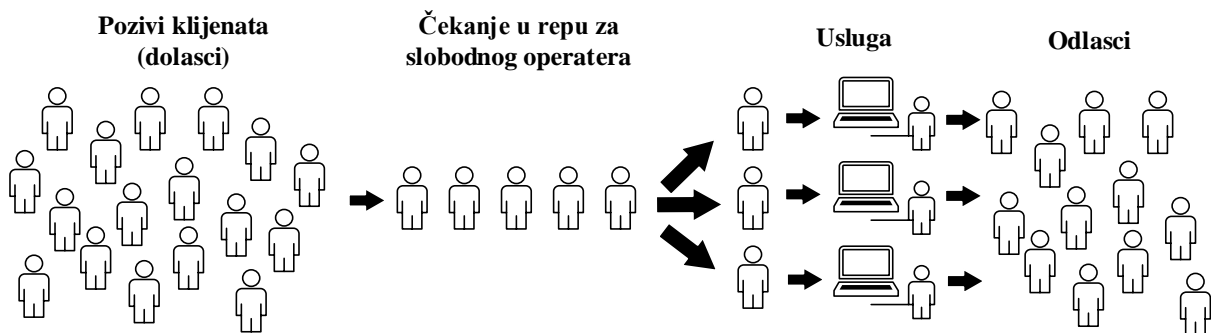
Teorija redova čekanja (masovnog opsluživanja) jedna je od metoda operacijskih istraživanja koja proučava procese opsluživanja slučajno pristiglih jedinica ili zahtjeva za nekom uslugom

koristeći se pritom matematičkim modelima s pomoću kojih se ustanovljava međuzavisnost između dolazaka jedinica, njihovog čekanja na uslugu, opsluživanja te na kraju izlaska iz jedinica sustava, s ciljem da se postigne optimalno funkcioniranje promatranog sustava. Riješiti problem reda čekanja znači odrediti optimalan broj uslužnih mjesta za koji će vrijeme čekanja u redu ili troškovi prouzrokovani čekanjem biti minimalni. Problem reda čekanja se rješavanjem ne može u potpunosti eliminirati već se samo gubici zbog čekanja mogu svesti na minimum.<sup>1</sup>

U nastavku su prikazana dva zanimljiva primjera sustava repa čekanja, prvi je fizički dolazak klijenata (automobila) u autopraonicu, a drugi je virtualni dolazak klijenata (uspostavljanje poziva) za dobivanje tražene usluge od operatera.



**Slika 1.** Sustav repa čekanja na primjeru autopraonice<sup>2</sup>



**Slika 2.** Sustav repa čekanja na primjeru „call-centra“<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Izvor: <https://www.yumpu.com/xx/document/read/25270785/drsc-zdenka-zenzerovia-teorija-pomorski-fakultet-u-rijeci> [pristupljeno: 28.kolovoza 2020.]

<sup>2</sup> Izvor: [http://e-student.fpz.hr/Predmeti/O/Osnove\\_prometnog\\_inzenjerstva/Materijali/OPI\\_PREDAVANJE\\_2012.pdf](http://e-student.fpz.hr/Predmeti/O/Osnove_prometnog_inzenjerstva/Materijali/OPI_PREDAVANJE_2012.pdf) [pristupljeno: 20.kolovoza 2020.]

<sup>3</sup> Izvor: <https://hrcak.srce.hr/126914> [pristupljeno 20.kolovoza 2020.]

#### 4. Elementi u repu čekanja

Reпови čekanja formiraju se radi ljudi ili stvari koji puno brže dolaze do pružatelja usluge, odnosno puno ranije nego što se ista može pružiti. To ne znači da operacija usluge nema dovoljno osoblja ili da nema dovoljno kapaciteta za obradu priljeva klijenata. Većina tvrtki i organizacija ima dovoljno uslužnih kapaciteta na raspolaganju da dugoročno usluže svoje klijente. Redovi čekanja nastaju zato što korisnici ne postižu stalnu, ravnomjernu stopu dolazaka, ali isto tako ih se ne može sve uslužiti u točno definiranoj distribuciji vremena. Klijenti dolaze u slučajno vrijeme, a vrijeme potrebno za usluživanje svakog pojedinog klijenta nije isto. Redovi čekanja „kontinuirano se povećavaju i smanjuju, ponekad ga ni nema, tj. sustav čekanja je prazan. Dugoročno se mora najviše promatrati prosječnu stopu dolazaka klijenata i prosječno vrijeme za pružanje usluge klijentu.“ (Russell, Taylor III, 2000:770) Primjerice, radnika na blagajnama u supermarketima ima dovoljno da u jednom satu opsluže prosječno 200 kupaca, a u određenom satu može doći samo 100 kupaca. Međutim, u određeno vrijeme tijekom sata, redovi čekanja mogu se pojaviti jer dolazi više od prosječnog broja kupaca i oni imaju veću kupovinu (košaricu) od prosječne.

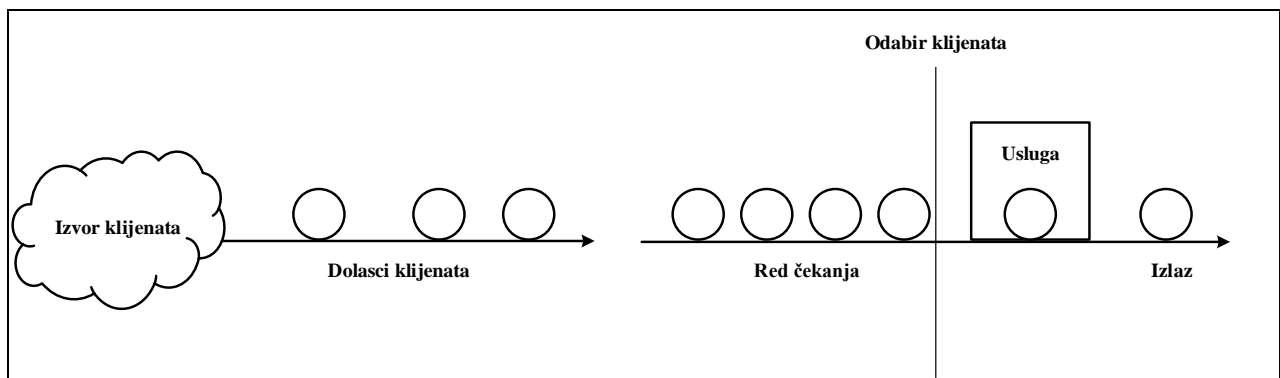
Taha (1992) smatra da glavne uloge u redu čekanja imaju klijent i poslužitelj. U modelima repova čekanja, interakcija između klijenta i poslužitelja zanimljiva je samo onoliko koliko je potrebno vremena klijentu da izvrši uslugu, odnosno bude uslužen. Stoga sa stajališta dolazaka klijenata u interesu su vremenski intervali koji razdvajaju uzastopne dolaske. Također, u operaciji pružanja usluge kod analiza pri proračunu nužno je vrijeme usluživanja po klijentu. U modelima repova čekanja, dolasci klijenata i vrijeme pružanja usluge često se prikazuju uz pojam vjerojatnosti, a većina autora se koristi metodologijom distribucija dolazaka i distribucijom vremena usluge. Upravo te distribucije mogu predstavljati situacije u kojima klijenti dolaze i uslužuju se pojedinačno (npr. banke ili supermarketi). U drugim situacijama klijenti mogu biti usluženi u skupinama (npr. restorani). Iako su distribucija dolazaka i vremena usluge glavni čimbenici u analizi reda čekanja, drugi čimbenici također imaju važnu ulogu u razvoju modela.

Postoje brojni modeli redova čekanja koji analitičarima stoje na raspolaganju. Naravno, veliki dio uspjeha analize ovisit će o odabiru odgovarajućeg modela. Na odabir modela utječu karakteristike sustava koji se ispituje. Pojedini autori, osnovne elemente sustava prikazuju tek s par elemenata, dok većina drugih nastoji što preciznije i detaljnije opisati sami model pa dolaze skoro do desetak osnovnih elemenata. Taha (1992) je upravo tako opisao cijeli model sa samo četiri ključna faktora, koji bi bili:



1. način odabira jedinica iz reda za početak usluge,
2. plan pristupačnosti i izvršenje usluge,
3. prihvatljiva veličina repa,
4. izvor dolazaka jedinica.

Poznavanje elemenata modela repova čekanja važno je iz dva razloga. Prvo zato da bi se utvrdio i razumio teoretski model te da se pored toga prepozna stvarni model kako bi se mogao proučavati u nekom od teoretskih modela. Osnovni model koji će se detaljnije obraditi u idućim potpoglavljima prikazan je slikom 3.



**Slika 3.** Osnovni elementi sustava repova čekanja

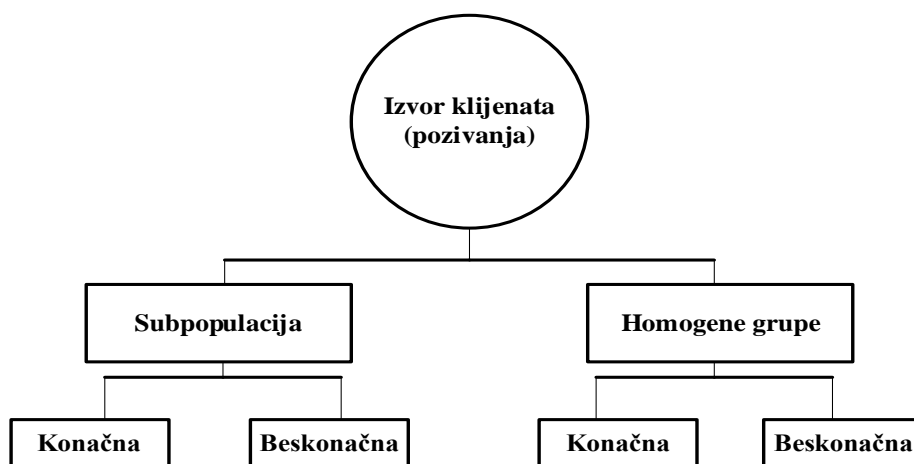
**Izvor:** (Barković, 2011:239)

#### 4.1. Izvor klijenata

Element izvora klijenata u mnogim literaturama se još definira kao izvor pozivanja (eng. calling population), izvor dolazaka klijenata, ulazni izvor i slično.

U mnogim raspravama o repu čekanja, klijent je osoba ili stvar koja želi uslugu iz određene operacije. „Izvor klijenata u sustavu čekanja može biti beskonačan ili ograničen, konačan. Beskonačni izvor klijenata pretpostavlja tako veliki broj potencijalnih klijenata da je uvijek moguće da će uvijek doći još barem jedan klijent po uslugu.“ (Russell, Taylor III, 2000:770-771) Vrlo bitno je shvatiti da takav skup nije u potpunosti beskonačan, odnosno ne mora biti ni neizbrojiv, samo je važno shvatiti da nije onemogućen pristup ostaloj populaciji pri ulasku u taj skup. Konačni izvor klijenata ima određeni, prebrojiv broj potencijalnih klijenata. Moguće je da svi klijenti budu istovremeno usluženi ili čekaju u redu, tj. može se dogoditi da ne bude uslužen još jedan klijent.

Hiller i Lieberman (1974) tvrdili su da izvor klijenata ima karakteristiku koju je najvažnije dobro spoznati, a to bi bila veličina izvora klijenata. Veličina je ukupan broj klijenata kojima bi povremeno mogla zatrebati usluga, tj. ukupan broj različitih potencijalnih klijenata. Kao što se prethodno spomenulo izvor može biti beskonačan ili konačan. Budući da su proračuni daleko lakši za beskonačni slučaj, ova se pretpostavka često iznosi čak i kada je stvarna veličina neki relativno velik konačan broj. Konačni slučaj, analitički je teži jer broj klijenata u sustavu čeka utječe na broj potencijalnih klijenata izvan sustava u bilo kojem trenutku. Međutim, konačna pretpostavka mora se iznijeti ako broj klijenata u sustavu čeka značajno utječe na brzinu kojom izvor klijenata generira nove klijente.



**Slika 4.** Podjela izvora klijenata

**Izvor:** (Fitzsimmons, Fitzsimmons, 2011:307)

Fitzsimmons i Fitzsimmons (2011) tvrde da izvor dolazaka klijenata ne mora biti homogen, odnosno može se sastojati od nekoliko subpopulacija. Na primjer, dolasci u ambulantu mogu se podijeliti na pacijente koji dolaze bez zakazanih termina (nije hitno), pacijente s zakazanim pregledima te na hitne pacijente. Svaka klasa pacijenata postavljat će različite zahtjeve za uslugama, ali što je još važnije, očekivanja svakog čeka značajno će se razlikovati.

Beskonačan izvor
Premašivanje kapaciteta sustava
Teoretski, usluga je neograničena i dostupna u bilo koje vrijeme
Supermarketi, drogerije, banke, restorani, kazališta, kina
Zabavni parkovi, naplatni mostovi...

**Tablica 2.** Značajke i primjeri beskonačnog izvora

**Izvor:** (Vlastita izrada autora)

Beskonačan izvor klijenata u stvarnosti bi obuhvatio cijeli grad, odnosno određeno geografsko područje. U situacijama s ograničenim izvorom klijenata navest će se isto par primjera za lakše razumijevanje. U prvom primjeru nalazi se serviser odgovoran za određeni broj strojeva u tvrtki. Potencijalni broj strojeva koji će u jednom trenutku možda trebati popravke ne može premašiti broj strojeva dodijeljenih serviseru. Nadovezujući se na strojeve, postoji primjerice jedan uredski kopirni stroj kojeg međusobno dijele tri tajnika. U ovom slučaju vjerojatnost budućih dolazaka ovisi o broju osoba koje su trenutno u sustavu i traže uslugu. Vjerojatnost budućeg dolaska postaje nula nakon što se treći tajnik pridruži redu za kopiranje na stroju. Slično tome, operater može biti odgovoran za utovar i istovar banke s pet bankomata, medicinska sestra može biti odgovorna za odgovaranje na pozive pacijenata za odjel sa samo deset kreveta, tajnica može biti raspoloživa za dobivanje posla od tri rukovoditelja, a trgovačka tvrtka može izvršiti popravak na dvadeset kamiona tvrtke.

#### **4.2. Dolasci klijenata**

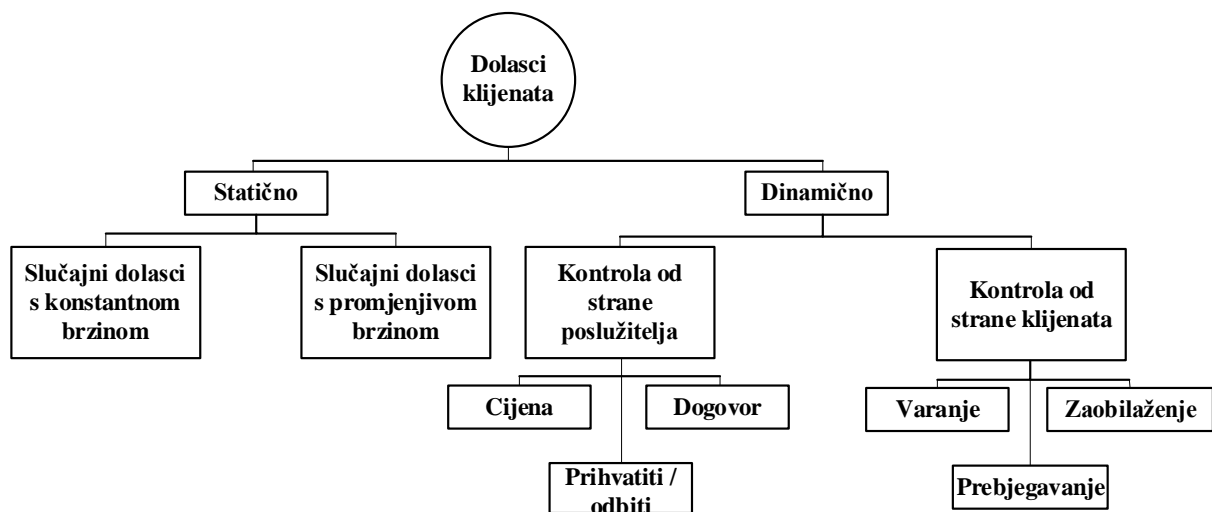
Kao drugi element sustava repova, dolasci klijenata pojavljuju se kad potencijalni klijent osjeti potrebu za određenom vrstom usluge. Na primjer, osoba će otići stomatologu i automatski postati pacijent radi svoje potencijalne boli, računalo će biti odneseno na popravak jer se pokvarilo, motor će biti odvezen na servis jer ne funkcionira kako treba i sl. Vrlo bitno je shvatiti da stalno spominjani klijenti ne moraju biti isključivo ljudi, već i ne-ljudi kojima je isto potrebna usluga. Klijenti iz „ne-ljudske“ populacije su npr. narudžbe koje treba izvršiti, dijelovi za ugradnju, podaci za kompjutorsku obradu i sl. Klijenti imaju više opcija dolaska, a one bi bile:

- a) **Pojedinačni dolasci** – blagajne u supermarketima, šalteri u bankama, avioni za slijetanje, automobili i motori na popravak, pacijenti kod doktora, zubara
- b) **Grupni dolasci** – grupa koja zajedno dođe na ručak/večeru u restoranu ili kavu, tortu, sladoled u slastičarnici, kavani i sl.

Uz dolaske klijenata većina autora povezuje distribuciju dolazaka klijenata, odnosno dosta njih zanemaruje same dolaske i definira isključivo distribuciju dolazaka klijenata. Također, vrlo je često svrstavanje distribucije dolazaka klijenata s distribucijom pružanja usluge, a često ih se naziva i obrascima ili stopama dolazaka klijenata. „Distribucija dolazaka je učestalost dolaska klijenata do repa čekanja tijekom određenog vremenskog razdoblja. Ta se distribucija može procijeniti na temelju empirijskih podataka dobivenih proučavanjem promatranog sustava ili sličnog, ili može biti prosjek tih empirijskih podataka.“ (Russell,

Taylor III, 2000::771) Na primjer, ako 100 klijenata dođe na šalter banke tijekom radnog dana od 10 radnih sati, može se reći da je stopa dolaska prosječno 10 klijenata na sat. Međutim, iako bi se mogla utvrditi stopu dolazaka brojenjem broja klijenata tijekom određenog vremenskog razdoblja, ne bi se znalo kada će ti klijenti točno doći. Moglo bi se dogoditi da nijedan klijent ne bi stigao tijekom jednog sata, a 20 klijenata tijekom drugog sata. Pretpostavlja se da su dolasci međusobno neovisni i da se vremenom slučajno razlikuju. Kroz godine istraživanja i višegodišnjih iskustava ljudi u području teorije čekanja došlo se do spoznaje da je najbolja distribucija za opis dolazaka klijenata u jedinici vremena upravo Poissonova distribucija.

Svaka analiza sustava usluga mora započeti potpunim razumijevanjem vremenske i prostorne distribucije potražnje za tom uslugom. Podaci se obično prikupljaju bilježenjem stvarnih vremena dolaska. Upravo takvi podaci zatim se koriste za izračunavanje vremena dolaska. Također, mnoga empirijska istraživanja pokazuju da će raspodjela vremena međudjelovanja upravo biti eksponencijalna.



**Slika 5.** Podjela dolazaka klijenata

**Izvor:** (Fitzsimmons, Fitzsimmons, 2011:310)

Gross, Shortle, Thompson i Harris (2008) smatraju da u uobičajenim situacijama čekanja, postupak dolazaka je stohastičan, pa je stoga potrebno znati raspodjelu vjerojatnosti koja opisuje vremena između uzastopnih dolazaka klijenata (vremena nedolaska). Također, potrebno je znati da li klijenti dolaze u istim intervalima, tj. jesu li dolasci serijski ili rasuti. Često se uz pojam dolazaka klijenata javljaju neredoviti, odnosno slučajni dolasci kod kojih nije moguće precizno odrediti potražnju za uslugama sve dok se ona stvarno i ne očituje.

Čimbenik koji treba uzeti u obzir kod obrazaca dolaska klijenata je način na koji se obrazac mijenja tijekom vremena. Uzorak dolazaka koji se ne mijenja s vremenom naziva se stacionarnim uzorkom dolaska, a uzorak koji ima razne događaje u međuvremenu često se naziva ne stacionarni ili dinamični.

U dosadašnjem dijelu pretpostavlja se da su klijenti strpljivi, odnosno da klijenti uđu u red čekanja i ostanu dok im se ne pruži usluga. Reakcija klijenata pri ulasku u sustav znaju biti različite, te ovise od osobe do osobe. Prema slici 5. dobiva se uvid da se kod pojedinih klijenata javljaju i drugačije potrebe pri dolasku u sustav. Te osobine klijenata kao što su varanje, zaobilaženje i prebjegavanje bit će više spomenute u idućem elementu sustava, redu čekanja.

### **4.3. Red čekanja**

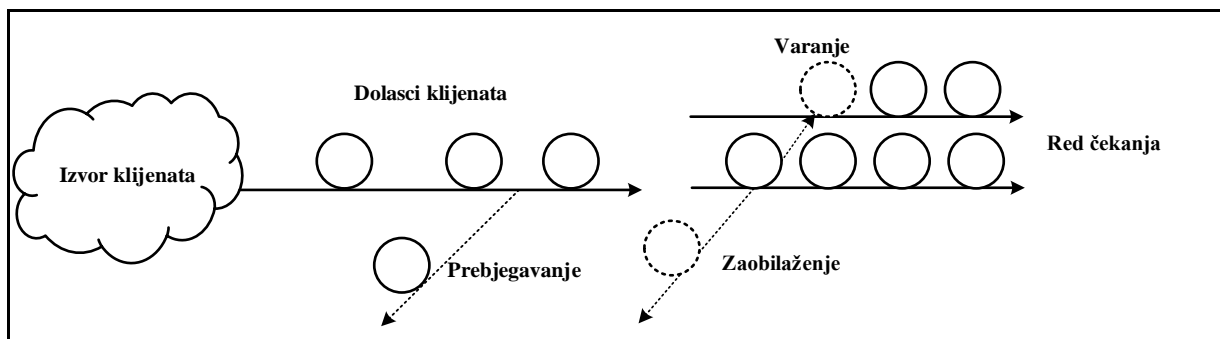
Red čekanja ovisi o tome kako klijenti pristižu i koliko brzo se usluga obavlja. Barković (2011) tvrdi da na dužinu i oblik reda utječe također i ljudski čimbenik u redovima gdje su klijenti ljudi. Postoje osobe koje, kada dođu u red, ostaju tamo dok ne dobiju željenu uslugu. Isto vrijeme provedeno u redu za neke je predugo, a za neke relativno kratko. U nekim procesima čekanja postoji fizičko ograničenje količine prostora, tako da kad linija dosegne određenu duljinu, više nije dopušten ulazak daljnjim klijentima dok prostor ne postane dostupan. Takva vrsta se naziva konačnim redovima čekanja, gdje postoji ograničenje maksimalne veličine sustava. Ukoliko je prostor čekanja neadekvatan za prihvatanje svih klijenata koji žele uslugu, oni se odbacuju. Restorani s ograničenim parkingom mogu u određenoj mjeri osjetiti ovaj problem. Beskonačni red čekanja može biti bilo koje veličine (bez gornje granice) i upravo je to najčešći oblik repova čekanja. Primjerice, pretpostavlja se da bi se red čekanja u kinu mogao protezati kroz predvorje i prema potrebi izlaziti kroz vrata.

„Virtualni red možda je najviše frustrirajući od svega jer ne postoje vidljivi pokazatelji vašeg položaja u redu.“ (Fitzsimmons, Fitzsimmons, 2011:311) Kad je klijent stavljen na čekanje dok pokušava doći do tvrtke ili krajnje informacije radi koje uspostavlja poziv, klijenti koji pozivaju nerado prekidaju poziv jer se na poziv ne može odgovoriti trenutno u stvarnom vremenu. Velik broj klijenata je frustriran gubitkom produktivnog vremena za vrijeme čekanja odgovora na njihov poziv. Neki su se „call-centri“ pozabavili tim problemom tako što povremeno izvještavaju klijenta o njihovom položaju u redu.

Reakcija klijenata pri ulasku u sustav postoji mnogo te se dosta puta ne može utjecati na iste. U redu čekanja često se nameću tri najčešće korištene reakcije od strane nestrpljivih klijenata, a one su:

- a) **Zaobilaženje** – vrsta ljudi, kojima je predugo čekati u redu te nakon dolaska „procijene“ situaciju, zaključče da im se ne isplati ostati te odmah napuštaju red, odnosno prije pružanja usluge
- b) **Prebjegavanje** – vrsta ljudi, koji vide dugačak rep čekanja te automatski napuštaju prostor čekanja, ne ulazeći u red, vjerojatno će otići uslugu potražiti na drugo moguće mjesto
- c) **Varanje** – ljudi „kalkulanti“, jedno vrijeme ostaju u redu, a kada zaključče da bi trebalo odustati, ili u slučaju više redova, mijenjaju red u nadi da će tako njihovo vrijeme čekanja biti kraće

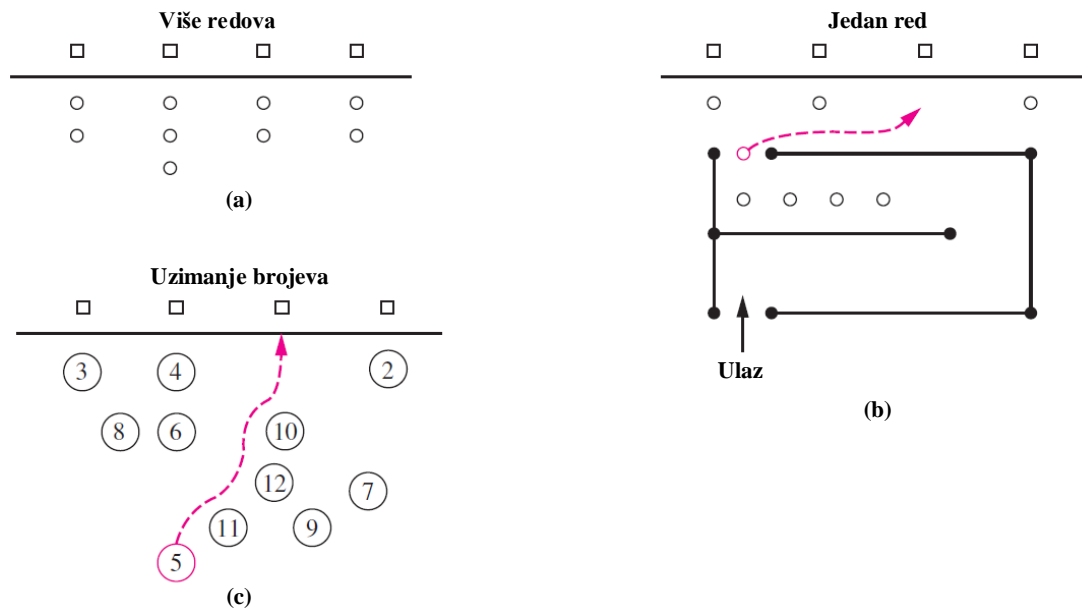
Prebjegavanje dosta autora svrstava u element red čekanja, ali vjerojatno bi preciznije bilo smjestiti ga u element dolazaka klijenata. Razlog je jednostavan, klijent ne ulazi u red čekanja već očigledno vidi da je red dugačak (fizički) i automatski odustaje bez ikakvog pokušaja ulaska u sami red čekanja.



**Slika 6.** Prikaz tri učestala ponašanja klijenata u repovima

**Izvor:** (Vlastita izrada autora)

Konfiguracija reda odnosi se na broj redova, njihove lokacije, njihove prostorne potrebe i njihove učinke na ponašanje klijenata. Slika 7 ilustrira tri alternativne konfiguracije u redu čekanja za uslugu, više redova na više poslužitelja, jedan red nakon kojeg se usmjerava na više poslužitelja te princip uzimanja brojeva i time prozivanje i odaziv klijenata na preuzeti (prozvani) broj. Prema Fitzsimmons i Fitzsimmons (2011) u nastavku su prikazane tri alternative te detaljno opisane.



**Slika 7.** Konfiguracije alternativa prostora za čekanje

**Izvor:** (Fitzsimmons, Fitzsimmons, 2011:311)

Za alternativu s više redova prikazanih na slici 7.a, klijent koji dolazi mora odlučiti kojem će se redu priključiti. Odluka, međutim, ne mora biti neopoziva, jer se netko može prebaciti na kraj drugog reda čekanja. Varanje je već spomenuta aktivnost gdje se klijenti prebacuju iz jednog reda čekanja u drugi red čekanja. U svakom slučaju, promatranje reda čekanja koji se kreće brže od reda u kojem određeni izvor stoji izvjesno vrijeme ima ustvari negativan utjecaj na klijenta, ali konfiguracija višestrukih redova ima sljedeće prednosti:

- 1) Mogu se razlikovati usluge koje se pružaju. Primjerice, brzi protok u supermarketima. Klijenti s malim zahtjevima za uslugom mogu se izolirati i brzo obraditi, izbjegavajući na taj način dugo čekanje za malu uslugu.
- 2) Moguća podjela rada. Primjerice, banke imaju više različitih šaltera, kao i osobnih bankara koji su dostupni klijentima.
- 3) Klijent ima mogućnost odabira određenog poslužitelja po vlastitoj želji.
- 4) Moguće odvratanje od zaobilaženja. Kad klijenti vide jedan dugačak jedan koji se nalazi ispred usluge, oni to često tumače kao dokaz dugog čekanja i odlučuju se ne pridružiti tom redu.

Na slici 7.b prikazan je uobičajeni raspored manjih stupova s fizički raspoređenim trakama, uždima u red oblika „zmije“. Time se usmjerava svakog klijenta u jedan red koji se kasnije razdvaja na više poslužitelja. Kad god poslužitelj postane dostupan, prvi klijent u redu prelazi

na obavljanje usluge. Ovo je popularan princip u bankarskim predvorjima, poštama i zabavnim parkovima. Njegove prednosti su:

- 1) Princip jamči pravednost osiguravajući da se pravilo „prvi dolazi, prvi poslužen“ (FCFS) primjenjuje na sve dolaske.
- 2) Postoji jedan red. Nema tjeskoba da li se odabrao najbrži red čekanja.
- 3) Sa samo jednim ulazom na stražnjoj strani reda, problem varanja je riješen, a prebjegavanje otežano.
- 4) Poboľšana je privatnost jer se transakcija provodi tako da nitko ne stoji odmah iza korisnika kojoj se usluđuje.
- 5) Ovaj raspored je učinkovitiji zbog smanjenja prosječnog vremena koje klijenti provode čekajući u redu.

Na slici 7.c prikazana je varijacija pojedinačnog reda u kojem klijent koji dolazi, uzima broj koji pokazuje njegovo mjesto u redu čekanja. Kada koristite princip brojeva za označavanje položaja u redu čekanja, nema potrebe za formalnom linijom. Klijenti mogu slobodno lutati, međusobno razgovarati ili obavljati pozive, opustiti se u stolici ili provesti neku njima potrebnu aktivnost. Nažalost, kao što je ranije napomenuto, klijenti moraju biti prisutni cijelo vrijeme, između ostalog i budni da bi čuli zvučni signal svojih brojeva ili će riskirati propustiti red za uslugu. U razvijenijim državama svijeta pekare suptilno koriste sustav „uzmi broj“ da bi povećale impulsnu prodaju. Klijenti kojima je prilika da pregledaju cijele pultove s pecivima često shvate da kupuju više od samog svježeg kruha po koji su došli.

#### **4.4. Odabir klijenata**

Odabir klijenata predstavlja prvi korak pri pružanju usluga. Neovisno o tome kako klijenti pristignu do servera, može ih se uvijek izabrati na više načina. Često se element odabir klijenata zna nazivati disciplinom usluge ili disciplinom reda.

Disciplina u redu čekanja odnosi se na način na koji se klijenti odabiru za uslugu kada se formira red. Najčešća disciplina koja se može primijetiti u svakodnevnom životu je „tko prvi dođe, prvi će biti usluđen“. Između ostalog taj pristup se smatra i najpoštenijim, ponajviše kada se u redu čekanja nalaze ljudi kao klijenti. Međutim, ovo očito nije jedina moguća disciplina u redu, a u nastavku su nabrojene neke od mogućih:



- a. FIFO (First In, First Out) ili FCFS (First Come, First Served), je način koji uzima u obzir redoslijed dolaženja: tko je prvi došao bit će i prvi poslužen. Ovo je najčešće korišteni poredak usluživanja.
- b. LIFO (Last In, First Out) ili LCFS (Last Come, First Served), je način koji daje prednost jedinici koja je zadnja ušla u red. Ako izlaženje iz lifta gledamo kao pružanje usluge, onda lift pun ljudi ilustrira LCFS poredak.
- c. PRIOR je oznaka prioriteta usluživanja koji daje prednost nekim jedinicama za usluživanje. Poredci prioriteta se često koriste u hitnoj pomoći, za određivanje redoslijeda u kojem će pristigli pacijenti primiti liječničku pomoć.
- d. SIRO (Service In Randon Order) se odnosi na slučajan odabir koji svakoj jedinici daje istu vjerojatnost posluživanja bez obzira na vrijeme dolaska u red.
- e. SPTF (Shortest Processing Time First) je disciplina kod koje se poslužuju ulazne jedinice sa najmanje vremena usluživanja. Ova disciplina pretpostavlja poznavanje vremena usluživanja pojedinih ulaznih jedinica.
- f. RR (Round Robin) podrazumijeva da svaka ulazna jedinica dobiva istu dužinu vremena posluživanja i ukoliko se dogodi da nakon tog vremena proces posluživanja nije završen, jedinica se vraća u red čekanja na zadnje mjesto, gdje čeka nastavak posluživanja.
- g. GD je oznaka za bilo koju drugu disciplinu čekanja.<sup>4</sup>

FCFS disciplina može se ogledati u mnoštvu primjera jer kako se već dosta puta spomenulo ona je najraširenija i najčešće korištena. Primjer je tako svaki klijent koji dolazi prvi na blagajnu u trgovinama, kazalištima, kinima i sl. Gledajući na automobil kao klijent, može se disciplina FCFS prikazati uz znak stop na raskrižjima, gdje svaki prvi auto, prvi je ustvari uslužen, pa se mora zaustaviti. Za potpunije shvaćanje LCFS discipline čekanja, može se promatrati banalna situacija u kojoj se nalazi operatera koji slaže određeni stroj. Dijelovi tog stroja su proizvedeni i automatski slagani od vrha do dna određene kutije. Kada se pogleda ista ta kutija iz ptičje perspektive može se primijetiti da je posljednji dio stroja sada na vrhu te kutije, a cijeli raspored je ustvari obrnut. Operater stroja upravo tako i slaže stroj jer takav

---

<sup>4</sup> Izvor: <http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/LAS06.pdf> [pristupljeno: 28.kolovoza 2020.]

raspored njemu odgovara, makar će taj posljednji dio na dnu kutije biti na samom vrhu kada bude kompletno sastavljen. Naravno, postoji opcija da operater stroja poseže u kutiju punu dijelova i slučajno odabire jedan, takva disciplina naravno onda postaje slučajna, SIRO.

Prema Gross, Shortle, Thompson i Harris (2008) postoje dvije opće situacije u prioritnim disciplinama. U prvom, koji se naziva preventivni, klijentu s najvišim prioritetom je omogućeno da odmah uđe u uslugu, čak i ako je klijent s nižim prioritetom već uslužen kada klijent višeg prioriteta uđe u sustav. Klijent s nižim prioritetom u usluzi je spriječen, njegova usluga je zaustavljena, da bi se ponovno nastavila nakon što se usluži klijent s višim prioritetom. Dvije su moguće dodatne varijacije: spriječena usluga klijenta te kad se nastavi može se nastaviti od točke gdje su stali pri prvom usluživanju ili započeti sve iznova. U drugom slučaju prioriteta, postoji ne preventivna situacija, klijent s najvišim prioritetom prelazi na početak reda, ali ne može biti uslužen dok klijent koji je trenutačno u usluzi ne bude dovršen, iako taj klijent ima niži prioritet.

Često su klijenti zakazani za uslugu prema unaprijed dogovorenom sastanku ili terminu, poput pacijenata u stomatološkoj ordinaciji ili u restoranu gdje su potrebne rezervacije. Ti se klijenti uzimaju prema unaprijed utvrđenom rasporedu bez obzira na to kada stignu u objekt. Russell i Taylor III (2000) navode primjer disciplina čekanja u kojem imamo klijente koji se obrađuju abecedno prema njihovim prezimenima, primjerice u školskim ustavama ili na razgovorima za posao.

Disciplinu FCFS, Fitzsimmons i Fitzsimmons (2011) definiraju statičkom jer se ne identificiraju drugi podaci osim položaja u liniji za identifikaciju sljedećeg klijenta usluge. Dinamičke discipline u redu čekanja temelje se na nekom atributu klijenta ili statusu reda čekanja. Uzimajući tako u obzir da profesor koji ima redove čekanja studenata ispred svojeg kabineta tijekom radnog vremena može odabrati sljedećeg studenta na temelju samo kratkog vremena aktivnosti (npr. predaja seminarskih radova prije studenata koji čekaju u redu za usmeni ispit ili konzultacije). Ovo pravilo najkraćeg vremena obrade (SPTF) ima svojstvo minimiziranja prosječnog vremena koje klijenti provode u sustavu. Dolasci se uobičajeno svrstavaju u prioritne klase na temelju nekog atributa, a FCFS disciplina koristi se unutar svake klase. Primjer je blagajna za brzu uslugu u supermarketima, gdje se obrađuju kupovine od deset ili manje predmeta. U konačnici to omogućava velikim trgovinama da segmentiraju svoje klijente (kupce) i na taj se način natječu sa svojom konkurencijom koje pružaju brzu uslugu. U medicinskom okruženju postupak poznat pod nazivom trijaža koristi se kako bi se

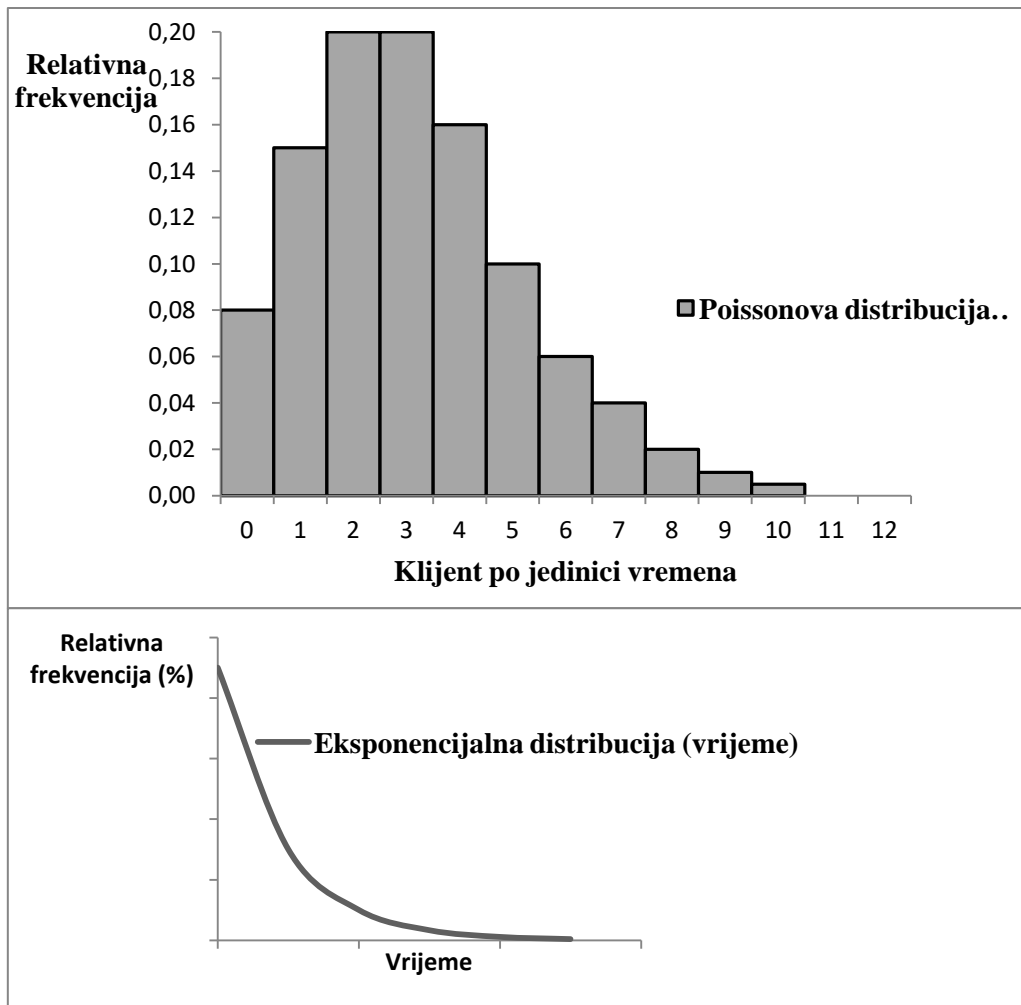
prioritet dao onima koji bi od neposrednog liječenja imali najviše koristi. Disciplina najvećeg prioriteta obično je rezervirana za hitne službe, poput vatrogasne ili hitne službe. Hitna pomoć koja je na putu do bolnice da pokupi pacijenta radi rutinskog premještaja prekinut će ovu misiju kako bi odgovorila na sumnju na poziv za zaustavljanje srca. Kreativne dinamičke discipline u redu čekanja iskorištavaju status reda, primjerice kružni koncept kakav koristi stomatolog s više soba za pregled. Jednom pacijentu se daje lokalni anestetik prije vađenja zuba te dok anestetik stupa na snagu, stomatolog prelazi na drugog pacijenta kojem su potrebne rendgenske snimke. Dakle, klijenti dijele davatelja usluga izmjenjujući čekanje i pružanje usluge. Kada broj klijenata u redu postane velik, postoji opet mogućnost korištenja SPTF-a.

#### **4.5. Usluga i izlaz**

Pretposljednja faza u sustavu reda čekanja, predstavlja pružanje usluge klijentima. Važno je razdvojiti usluge na tri glavne karakteristike, usluga ovisi o broju uslužnih mjesta, o broju usluga koje je nužno obraditi te o distribuciji vremena koje je potrebno za obavljanje usluge.

Postupak usluge ovisi o broju klijenata koji čekaju na uslugu. Poslužitelj ponekad može zabljesnuti i raditi brže ako stvori red čekanja, no isto tako i potpuno stagnirati. Usluga je uvijek ponajviše ovisna o elementu dolazaka klijenata u sustav, ali i o ponašanju klijenata tijekom reda čekanja. Usluga može biti pojedinačna ili grupna. Prirodno je da samo jedan poslužitelj može uslužiti jednog klijenta, ali postoje mnoge situacije u kojima klijenti mogu biti istodobno usluženi od istog poslužitelja. Primjerice kao što je računalo s paralelnom obradom, turisti (koji razgledaju) u obilasku ili ljudi koji se ukrcavaju na vlak.

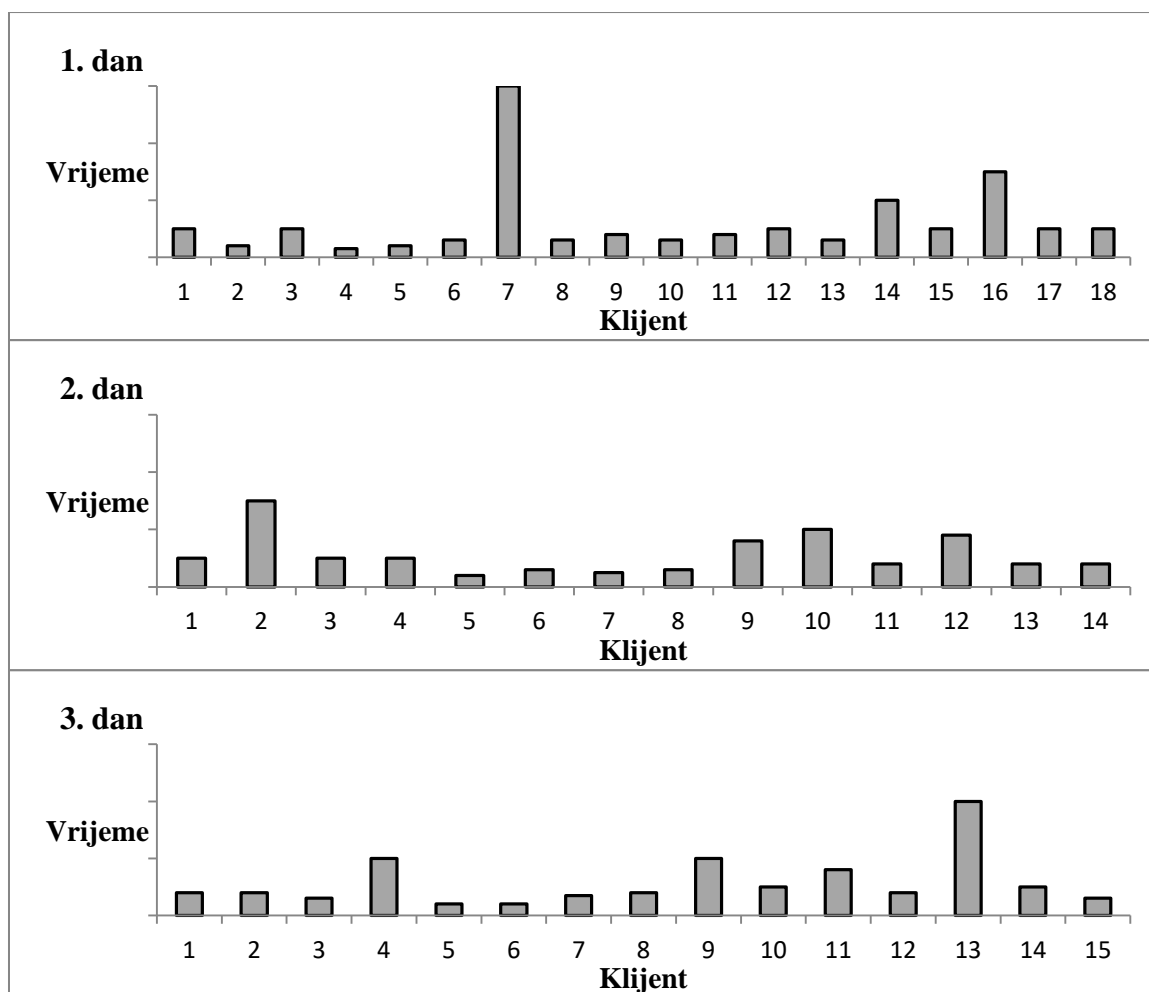
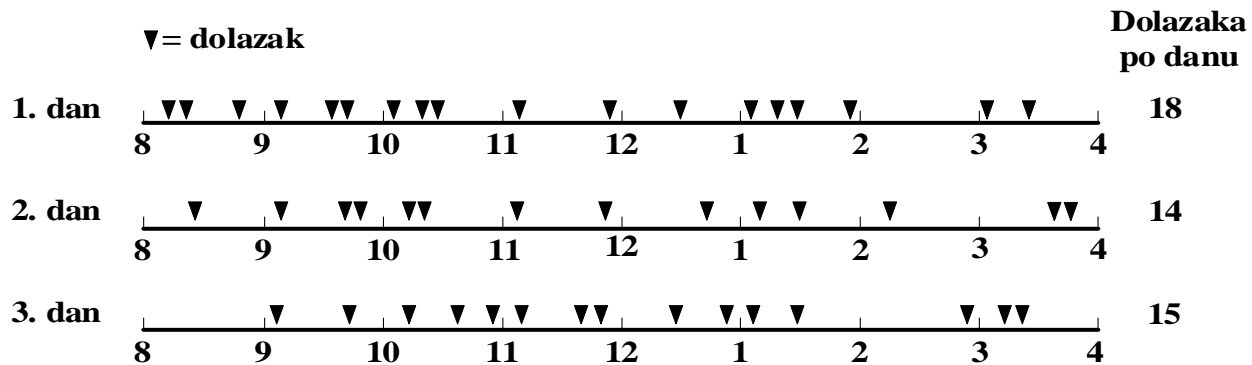
„Usluga je poput elementa dolaska klijenata, može biti statična ili dinamična obzirom na vrijeme. Kod procesa učenja rezultat je u obliku usluge koja postaje učinkovitija stjecanjem iskustva. Ovisnost o vremenu ne treba miješati sa ovisnošću o stanju. Prvi ne ovisi o broju klijenata u sustavu, već o tome koliko dugo funkcionira. Ovisnost o stanju, ne ovisi o tome koliko dugo sustav radi, već samo o stanju sustava u određenom trenutku, odnosno o tome koliko je klijenata trenutno u sustavu.“ (Stevenson, 2009:833) Modeli koji se sastoje od jednog ili više uslužnih mjesta, kao i jedne ili više uzastopnih usluga bit će detaljnije obrađeni u narednim poglavljima.



**Slika 8.** Prikaz Poissonove i negativne eksponencijalne distribucije

**Izvor:** (Stevenson, 2009:833)

Redovi čekanja izravan su rezultat varijabilnosti dolazaka i usluga. Oni se događaju zato što slučajni, visoko promjenjivi obrasci dolaska i pružanja usluga uzrokuju privremeno preopterećenje sustava. U mnogim se slučajevima varijable mogu opisati distribucijama. Modeli koji se najčešće koriste pretpostavljaju da se stope dolaska i usluge mogu opisati Poissonovom distribucijom, odnosno da se vrijeme međudjelovanja i vrijeme usluge mogu opisati negativnom eksponencijalnom distribucijom. Prikaz prethodno spomenutih distribucija prikazan je slikom 8.



**Slika 9.** Poissonova distribucija dolazaka i eksponencijalna distribucija vremena usluga

**Izvor:** (Stevenson, 2009:834)

Poissonova distribucija često pruža prilično dobar opis dolazaka klijenata po jedinici vremena. Stevenson (2009) prema priloženoj slici 9. nastoji prikazati u prvome dijelu kako se Poissonovom distribucijom može doći do dolaska klijenata tijekom trodnevnog razdoblja. U nekim satima dolazi i do tri ili četiri dolazaka, dok u nekim satima nema dolazaka. Negativna

eksponencijalna distribucija često pruža relativno dobar opis vremena usluge koja se pruža klijentu. Ilustracija s tri različita dijagrama prikazuje kako se može pojaviti eksponencijalna vremena usluge za klijenta čiji su dolasci prikazani na istoj slici u prvome dijelu. Treba imati na umu da je većina usluga vrlo kratka, neke su blizu nule dok za neke je potrebno relativno dugo vrijeme pružanja usluge. Uobičajeno je to za negativnu eksponencijalnu distribuciju. Redovi čekanja najvjerojatnije će se pojaviti kada su grupni dolasci ili kada je vrijeme pružanje usluge posebno dugo, a vrlo je vjerojatno da će se dogoditi kada su prisutna oba faktora. Na primjeru prikazanog slikom tri dijagrama eksponencijalnih vremena usluga uočava se dugo vrijeme pružanja usluge kod klijenta br. 7 u prvome danu. Dok na istoj slici prvog dijela gdje je prikazana Poissonova distribucija dolazaka može se primijetiti da je klijent br. 7 stigao nešto malo poslije 10 sati, a sljedeća dva klijenta stigla su nedugo nakon toga. Vrlo vjerojatno je upravo to stvorilo red čekanja. Slična se situacija dogodila trećeg dana s posljednja tri klijenta, razmjerno dugo vrijeme pružanja usluge za klijenta br. 13 (dio slike s Poissonovom distribucijom dolazaka), ali i kratko vrijeme prije sljedeća dva dolaska (dio slike s eksponencijalnom distribucijom vremena usluga, 3. dan) stvorili su red čekanja. Zanimljivo je primijetiti da su Poissonova i negativna eksponencijalna raspodjela alternativni načini prikazivanja istih osnovnih podataka. Odnosno, ako je vrijeme usluge eksponencijalno, tada je Poissonova stopa usluge. Slično tome, ako je Poissonova stopa dolazaka klijenata, tada je vrijeme međudjelovanja (vrijeme između dolazaka) eksponencijalno. Na primjer, ako uslužni objekt može obrađivati 12 kupaca na sat (stopa), prosječno vrijeme usluge je pet minuta. Također, ukoliko je stopa dolaska 10 na sat, tada je prosječno vrijeme između dolazaka šest minuta.

Prethodno opisane distribucije općenito zahtijevaju da se stope dolaska i usluga podvrgnu opisu koristeći Poissonovu distribuciju, odnosno da se vremena dolaska i pružanja usluge opisuju koristeći negativnu eksponencijalnu distribuciju. U praksi je potrebno provjeriti jesu li ove pretpostavke ispunjene. Stevenson (2009) objašnjava da se to radi prikupljanjem podataka i njihovim crtanjem, premda je preferirani pristup korištenje hi-kvadrat testa. Dolasci klijenata u redu čekanja opisani su cijenom i uslugom u ovisnosti o vremenu. Također, empirijsko istraživanje pokazalo je da pretpostavka negativne eksponencijalna distribucije usluge ne vrijedi ni približno toliko često kao pretpostavka o dolascima opisivani i prikazivani Poissonovom distribucijom. Stoga bi za stvarne primjene analize u redu čekanja ovu pretpostavku trebalo pažljivo provjeriti prije nego se koristi negativna eksponencijalna distribucija.

Upravo tako istraživanja su pokazala da su te pretpostavke često primjerene za dolaske klijenata, ali manje je vjerojatno da su prikladne za uslugu. U situacijama u kojima pretpostavke nisu razumno zadovoljene, alternative bi prema Stevenson (2009) bile:

1. razviti prikladniji model,
2. potražiti bolji (i obično složeniji) postojeći model ili
3. pribjeći računalnoj simulaciji.

Svaka od ovih alternativa zahtijeva više napora ili troškova od prethodno prikazanih.

Nakon što se prošao element usluživanja klijenata, sami klijent napušta kompletan sustav i bez neke preopširne analize odlazi na izlaz. Prikazujući posljednju fazu sustava, izlaz se definira kao neposredno vraćanje klijenata u izvor klijenata ili kao izlaz iz skupa potencijalnih klijenata. Jednostavnim primjerom možemo zamisliti pacijenta koji je nakon bolesti (prehlade, gripe i sl.) stekao određeni imunitet.

## 5. Klasifikacija sustava repova i terminologija

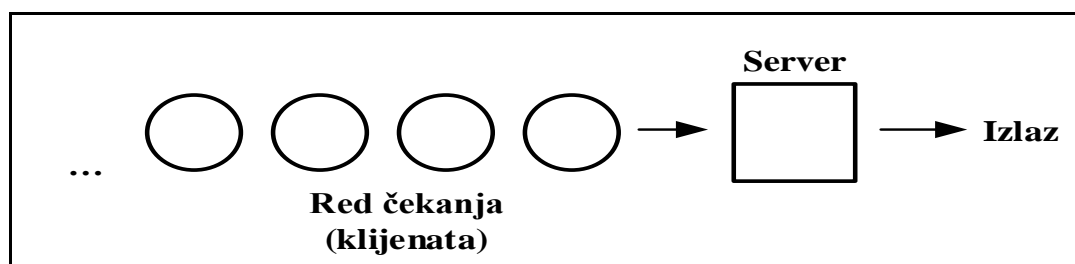
Modela repova čekanja postoji zaista mnogo te ih je iznimno teško sve obuhvatiti. Treba biti svjestan da određene situacije u stvarnosti mogu biti znatno kompliciranije i jednostavno, pojedine nije moguće uopće prikazati konkretnim matematičkim modelom. Prema Davis i McKeownu (1984), radi definiranja stvarne situacije sa matematičkim modelom, nužno je odgovoriti na sljedeća pitanja:

- Postoji li samo jedno ili više mjesta usluga?
- Postoji li samo jedna vrsta usluga ili više uzastopnih usluga koje se moraju obaviti?
- Da li jedinice koje zahtijevaju usluge stižu po nekom pravilu ili sasvim slučajno?
- Da li je vrijeme usluga ujednačeno ili svaka usluga ima različito trajanje?

Upravo matematički modeli koji daju odgovore na prethodna pitanja mogu se definirati pomoću idućih karakteristika prema Barković (2011):

- Jedna faza ili više faza usluga
- Jedan rep (kanal) čekanja ili više kanala čekanja

Pojedini autori predstavljaju poslužitelje kao sinonime za kanale, ali u ovome radu pridržavat će se prethodno definiranih pojmova gdje kanali predstavljaju repove čekanja klijenata. Kapacitet sustava čekanja je funkcija kapaciteta svakog poslužitelja i broja poslužitelja koji se koriste. Općenito se pretpostavlja da svaki poslužitelj može rukovati s jednim klijentom istovremeno.



**Slika 10.** Model – jedan kanal, jedna faza usluge

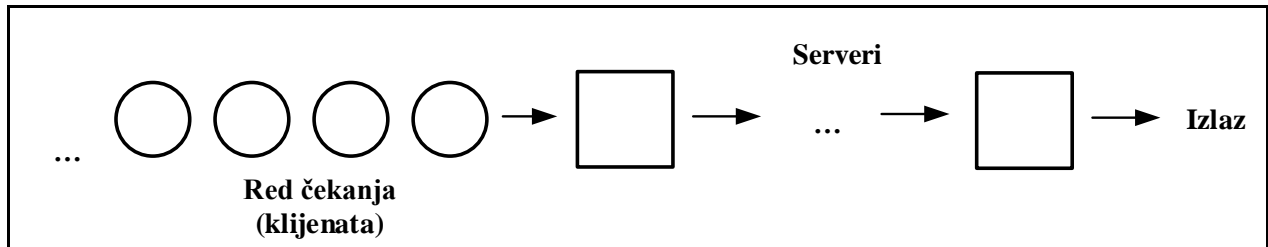
**Izvor:** (Barković, 2011:242)

Slika 10 prikazuje najjednostavniji model sustava repa čekanja, koji se sastoji od jednog reda čekanja (kanala) i jedne faze usluge (servera, poslužitelja). Primjeri sustava s jednim kanalom i jednom fazom usluge bile bi:

- male trgovine prehrambenim proizvodima s jednom blagajnom



- pošta s jednim poštanskim šalterom
- red za kupovinu kazališnih karata ili kino ulaznica sa samo jednim prodajnim mjestom
- operacija u bolnici, jedan kirurški tim obavlja jednu uslugu (operaciju), također red čekanja za identičan kirurški tim je jedan – tim se tretira kao jedan poslužitelj
- studentska kantina na fakultetu s jednom blagajnom i sl.

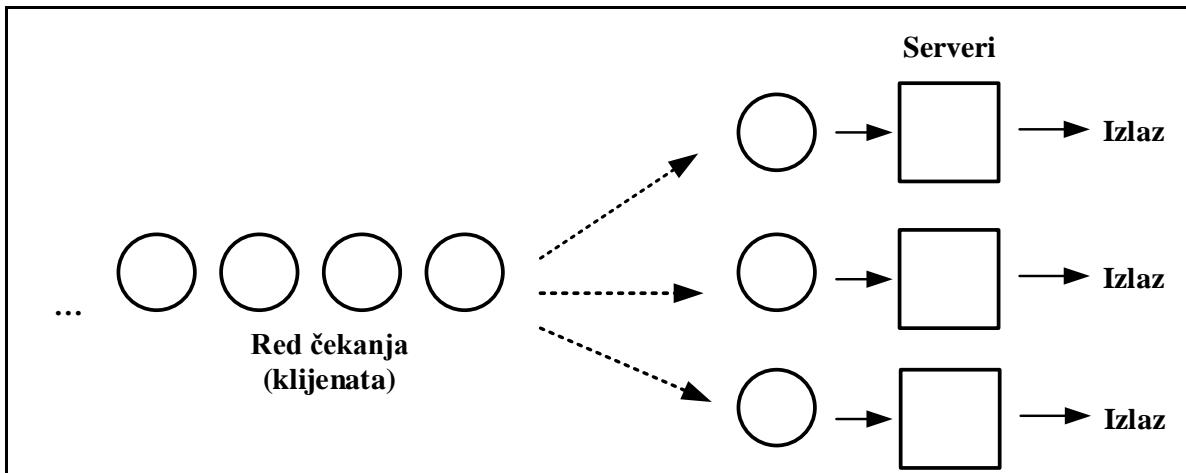


**Slika 11.** Model – jedan kanal, više faza usluga

**Izvor:** (Barković, 2011:242)

Malo složeniji model od prethodnog sastojao bi se od jednog reda čekanja (kanala), ali više faza usluga. Neki od primjera bili bi:

- sistematski pregled kod doktora, svaki pacijent prolazi nekoliko faza usluga, npr. medicinska anamneza gdje se prolazi pregled očiju, pregled uha, nosa i grla, krvne pretrage itd.
- pregled pacijenata može prolaziti tokom gdje se prvo odlazi kod medicinske sestre i njezinog osnovnog pregleda (mjerjenje visine, težine, tlaka i sl.), a nakon toga nastavlja se na drugu uslugu od strane doktora
- studentski restoran gdje se čekanjem prolazi jedna fazu usluge, odnosno samoposluga s dostupnim jelima, a nakon toga nastavak čekanja u istome redu za plaćanje na jednoj blagajni



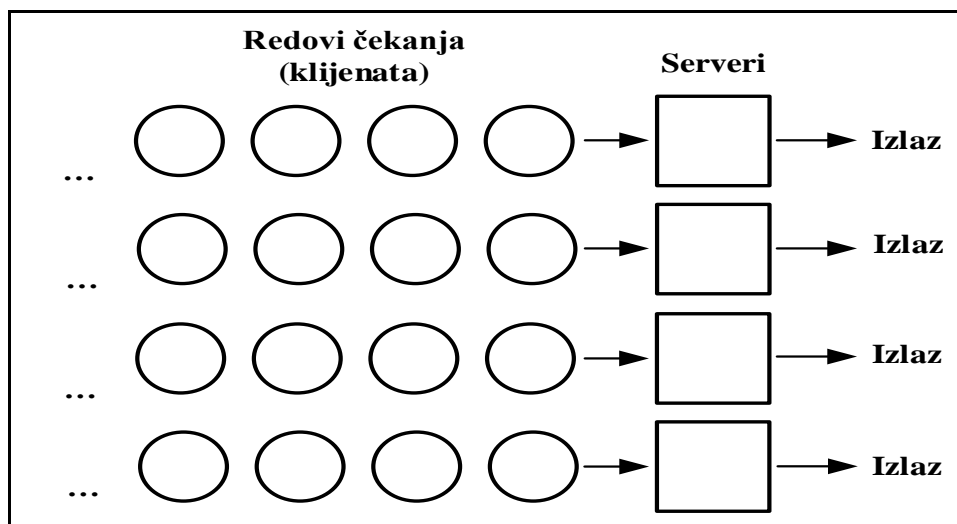
**Slika 12.** Model – jedan kanal, više mjesta usluga, jedna faza usluge

**Izvor:** (Barković, 2011:242)

Model s jednim kanalom, više mjesta usluga te jednom fazom usluge je puno češći model kojem i prethodna dva uglavnom teže. Razlog više mjesta usluga omogućuje manje klijenata u nekim redovima, poglavito ako se jedan klijent zadrži određeno vrijeme na jednom poslužitelju, ostali klijenti automatski odlaze na druge poslužitelji koji postaju trenutno dostupni. Veći broj operativnih sustava čekanja uključuje više poslužitelja. Ovakav sustav uključuje jednu liniju čekanja i uslužni objekt s nekoliko neovisnih poslužitelja paralelno. Pojedini primjeri su:

- frizerski salon s više radnih mjesta, odnosno više frizera gdje svaki ima zasebno radno mjesto, red čekanja je jedan dok je usluga jednaka za svakoga, naravno u ovom slučaju ide se pretpostavkom da nijedan klijent ne čeka određenog frizera
- jedan red čekanja u trgovini koja ima više blagajnika, a klijent odlazi prvom koji je slobodan
- putnici na aerodromima i pregled karte, jedan red čekanja omeđen trakama kroz koje se mora kretati, više poslužitelja na usluzi kada se dođe na red za uslugu

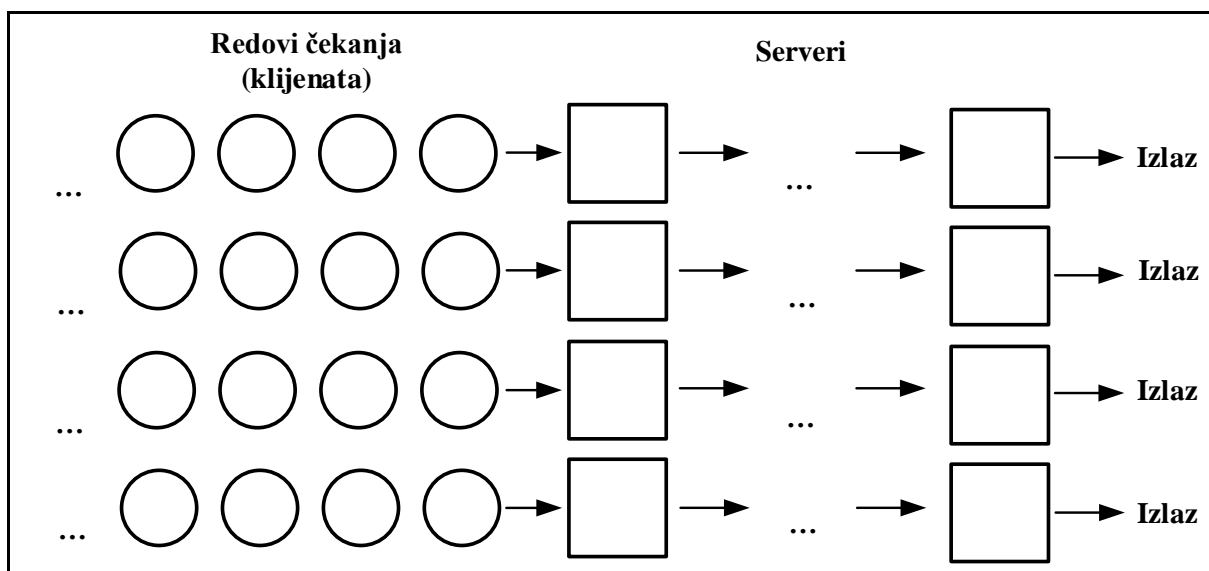
Također, ovaj model ima mogućnost proširenja s više faza usluga. Primjerice jedan red čekanja u bankama, a klijenti obavljaju usluge kod različitih osobnih bankara ili menadžera za odnose s klijentima.



**Slika 13.** Model – više kanala, jedna faza usluge, više mjesta usluga

**Izvor:** (Barković, 2011:243)

Sustav s više kanala, jednom fazom usluge te više mjesta usluge dostupni su u sve većem broju. Kao primjer u gotovo svakom supermarketu imamo više blagajni, a svaka ima svoj red čekanja.

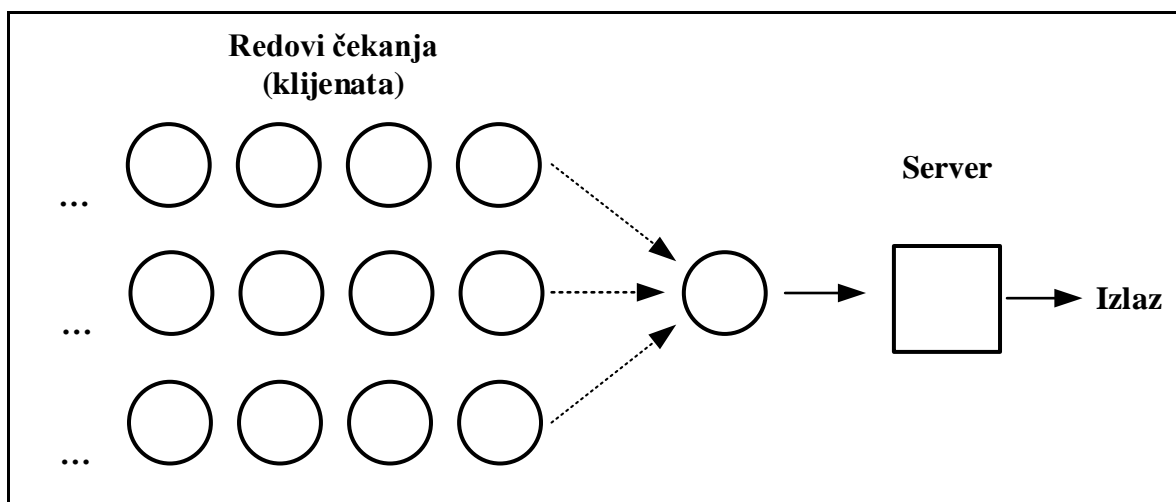


**Slika 14.** Model – više kanala, više faza usluga, više mjesta usluga

**Izvor:** (Barković, 2011:243)

Izuzev više kanal i mjesta usluga, dostupan je i model sa više faza usluga. Primjeri su raznovrsni i ima ih mnogo:

- samoposluga u supermarketima s više redova, kada se dođe do usluge postoji prva faza naplata računa na blagajni, a nakon toga faza usluge pakiranja
- benzinske crpke s više redova čekanja, prva usluga je točenje goriva u automobil, iduće su usluge naplata računa na blagajnama, a postoji još samoposluga za kupovinom određenih stvari, hrane, pića i sl.
- pregledi pacijenata u više redova, kada postoji više poslužitelja, odnosno više faza usluga od strane medicinskih sestara, pa kasnije liječnika
- sklapanje proizvoda, na više pojedinačnih poslužitelja (strojeva i radnika) te u više redova čekanja



**Slika 15.** Model – više kanala, jedna ili više faza usluga, jedno mjesto usluge

**Izvor:** (Barković, 2011:243)

Posljednji model koji je prikazan slikom 15., sastoji se od više kanala, jednog mjesta usluge te jedne ili više faza usluge. Primjer takvog sustava pronalazi se u računalnoj obradi podataka kod sustava koji se sastoji od više terminala s podacima za obradu i jednog servera koje iste te podatke obrađuje.

Uvijek je moguće vizualizirati poznatu situaciju čekanja koja ne odgovara niti jednoj od ovih kategorija struktura linija čekanja. Predstavljene kategorije reda čekanja su jednostavno neke osnovne kategorije, varijacija je mnogo. Modeli čekanja mogu postati prilično složeni. Međutim, temelji osnovne teorije čekanja bitni su za analizu svih problema u redovima, bez obzira na njihovu složenost.

Modeli repova čekanja definirani su kao deskriptivni i time rezultiraju s više mogućih rješenja, a ne jednim optimalnim. Utvrdilo se da ponašanje repova jednostavno nije moguće

proučavati na jedan način, ali i određene vrste je iznimno teško opisati matematičkim modelima. Jednostavniji modeli često nemaju potrebe za računalnom podrškom ili pretjeranim matematičkim proračunima što je nužno kod simulacija. Radi razumijevanja samih modela, pogotovo onih složenijih te simulacija, potrebno je definirati osnovne pojmove u teoriji repova čekanja. Prema uzoru na Gaither i Fraizer (1999) spomenuti pojmovi su:

Dolazak – predstavlja jednu jedinicu iz distribucije dolazaka. Događa se kad osoba, stroj, dio, itd., dolazi u sustav i zahtjeva uslugu. Svaka jedinica može se i dalje nazivati dolaskom u takav sustav.

Stopa dolazaka ( $\lambda$ ) – broj dolazaka stvari ili osoba u jedinici vremena (npr. broj osoba po satu). Stopa dolazaka obično se ponaša prema normalnoj ili Poissonovoj distribuciji.

Kanali – broj redova čekanja (klijenata) u sustavu. Sustavi mogu imati jedan red, ili dva i više redova.

Rep – red čekanja

Disciplina repa – pravila koja određuju redosljed u kojem izabrani klijenti prolaze kroz sustav. Neke uobičajene discipline reda su: prvi unutra – prvi uslužen, zadnji unutra – prvi uslužen, prema prioritetima, najkraće vrijeme obrade itd.

Dužina repa – broj klijenata koji stoje u repu u jednom trenutku, i koji žele biti usluženi.

Faze usluge – broj uzastopnih mjesta gdje se obavljaju dijelovi usluga. Jednofazni sustav ima samo jedno mjesto, dok višefazni sustav ima dva ili više mjesta za izvršavanje usluge.

Stopa usluge ( $\mu$ ) – broj uslužениh korisnika u jedinici vremena. Obično je konstantna normalna ili Poissonova distribucija.

Vrijeme usluge ( $1/\mu$ ) – vrijeme koje je potrebno da se izvrši usluga. Ono ne uključuje vrijeme čekanja u repu.

Vrijeme u sustavu – ukupno vrijeme koje klijenti provode u sustavu. Uključuje vrijeme čekanja u repu i vrijeme usluge.

Vjerojatnost ( $P_n$ ) – stupanj mogućnosti dolazaka klijenata u sustav. Izvodi se kao vjerojatnost u kojem nastupa n broj dolazaka klijenata u sustav.

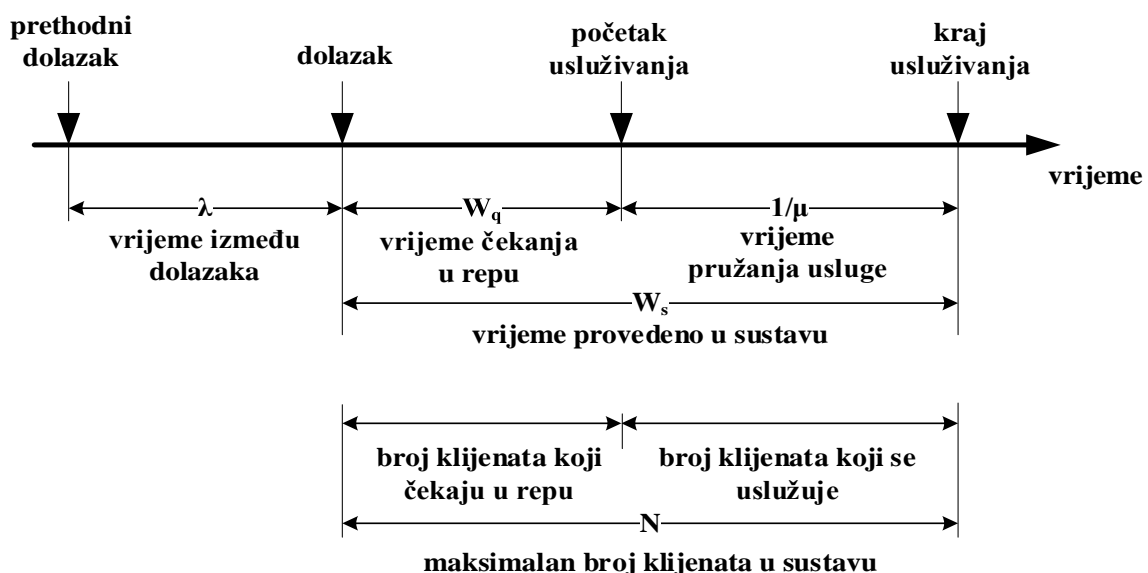
Vrijeme čekanja – vrijeme koje klijenti provode u repu čekajući na uslugu.

Uz naveden terminologiju, vrlo bitno je odrediti i značenja pojedinih varijabli koje će se koristiti kroz cjelokupan rad, posebice uz analizu repova čekanja.

$\lambda$	Stopa dolazaka klijenata
$\lambda_{\text{eff}}$	Efektivni (stvarni) dolazak klijenata
$M$	Stopa izvršenih usluga
$L_s$	Očekivani broj klijenata u sustavu
$L_q$	Očekivani broj klijenata u repu
$\bar{c}$ ( $\bar{S}$ )	Prosječan broj klijenata u sustavu
$c$ ( $S$ )	Broj kanala u sustavu
$P_n$	Vjerojatnost da je točno $n$ klijenata u sustavu
$P_0$	Vjerojatnost da nije ni jedan klijent u sustavu, odnosno da je sustav prazna
$N$	Maksimalan broj klijenata u sustavu (i oni koji čekaju i oni koji se trenutno uslužuju)
$W_q$	Prosječno (očekivano) vrijeme čekanja
$W_s$	Prosječno (očekivano) vrijeme koje klijent provede u sustavu

**Tablica 3.** Definicije varijabli repa čekanja

**Izvor:** (Stevenson, 2009:837), (Russell, Taylor III, 2000:774), (Barković, 2011:246)



**Slika 16.** Prikaz varijabli na primjeru<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Izvor: [https://www.ieee.hr/download/repository/queueuing\\_theory\\_predavanja.pdf](https://www.ieee.hr/download/repository/queueuing_theory_predavanja.pdf) [pristupljeno: 29.kolovoza 2020.]

## 6. Analiza i kvaliteta sustava repa čekanja

### 6.1. Mjere učinkovitosti

Većina rasprava o repovima čekanja se temelji na slikovitim opisima procesa čekanja i više fizičkim stvarima. No treba obratiti pažnju i prikazati stvari i s druge strane, odnosno kako doći do učinkovitosti i isplativosti u svim tim repovima čekanja. Gross, Shortle, Thompson i Harris (2008), učinkovitost sustava čekanja definiraju na mnoštvo načina, a odgovori u svrhu interesa sustava bili bi da je ono:

- mjera čekanja koje bi obični klijent bio prisiljen izdržati
- indikacija načina na koji se klijenti nagomilavaju
- mjera idealnog vremena za poslužitelje

Budući da većina sustava čekanja ima stohastičke elemente, ove mjere su često slučajne varijable i poželjne su njihove raspodjele vjerojatnosti ili u najmanju ruku očekivane vrijednosti.

Postoje dvije vrste vremena čekanja klijenata:

- vrijeme koje klijent provodi u redu te
- ukupno vrijeme koje kupac provodi u sustavu (red čekanja i usluga).

Ovisno o sustavu koji se proučava, jedan može biti zanimljiviji od drugog. Primjerice ukoliko proučavamo zabavni park, vrijeme čekanja u redu čini klijenta nezadovoljnim. S druge strane, ako proučavamo strojeve kojima je nužan popravak, određeni stroj zadržava se što je manje moguće, to predstavlja ukupno vrijeme odustajanja (čekanje u redu + vrijeme popravka). U skladu s tim, postoje i dvije vrste količine klijenata: broj klijenata u redu i ukupan broj klijenata u sustavu. Kod opremanja prostora, vrlo bitno je napraviti dobru viziju i projekt obrativši pozornost na prostor za čekanje. Primjer, koliko je stolica potrebno za klijente koji čekaju u frizerskom salonu. Mjere neaktivne usluge mogu uključivati postotak vremena kada bilo koji određeni poslužitelj ne radi ili vrijeme kada je cijeli sustav prazan (nema nijednog klijenta).

Zadatak menadžera je da treba odrediti vrijednosti odgovarajućih mjera učinkovitosti za određeni postupak ili dizajnirati "optimalni" sustav (prema nekom kriteriju). Za ispunjavanje prvog faktora, potrebno je povezati kašnjenja s čekanjem, duljine redova i slično s danim

svojstvima dolazaka klijenata i obrascima usluge. Drugi faktor, gdje menadžer dizajnira sustav, vjerojatno bi težio uravnotežiti vrijeme čekanja klijenata i vrijeme neaktivnosti poslužitelja prema nekoj svojstvenoj strukturi troškova. Ukoliko se troškovi usluge čekanja i praznog hoda mogu izravno dobiti ili procijeniti, onda se isti mogu koristiti za određivanje optimalnog broja kanala za održavanje i brzine pružanja usluge po tim kanalima. Također, za dizajn čekaonice potrebno je posjedovati informacije u vezi s mogućom veličinom reda za planiranje čekaonice. Isto tako mogu postojati troškovi prostora koji bi se trebali uzeti u obzir zajedno s troškovima čekanja klijenata i troškovima poslužitelja u praznom hodu kako bi se dobila optimalna konstrukcija sustava. U svakom slučaju, analitičar će nastojati riješiti ovaj problem analitičkim sredstvima, no ukoliko to nije moguće, jedina je opcija simulacije. U konačnici, problem se uglavnom svodi na trgovinu boljom uslugom za klijente u odnosu na trošak pružanja većih usluga.

Koje informacije menadžeri obično trebaju znati o redovima čekanja, prema Gaither i Fraizer (1999):

1. S obzirom na to da je usluga osmišljena tako da u prosjeku uslužuje određeni broj dolazaka klijenata po satu:

- a. Koliki je prosječni broj jedinica koje čekaju?
- b. Koje je prosječno vrijeme provedeno u čekanju svake jedinice?
- c. Koliki je prosječni broj jedinica koje čekaju i koje se uslužuju (u sustavu)?
- d. Koje je prosječno vrijeme koje svaka jedinica provede u sustavu?
- e. Koliki je postotak vremena sustav prazan?
- f. Kolika je vjerojatnost da će  $n$  jedinica biti u sustavu?

2. Ili, s obzirom da menadžment postavlja politike koje ograničavaju prosječni broj čekanja jedinica, prosječni broj jedinica u sustavu, prosječno vrijeme koje svaka jedinica čeka, prosječno vrijeme u kojem se svaka jedinica nalazi ili postotak vremena u kojem je sustav prazan, koji su kapaciteti uslužnog centra potrebni da bi se udovoljilo ovim politikama upravljanja?

Menadžeri često imaju mnogo razloga za brigu o redovima čekanja. Jedni od češćih i važnijih razloga koji izazivaju implikacije prikazani su idućom tablicom.



<b>Implikacije menadžera uz redove čekanja:</b>	
<b>1.</b>	Trošak osiguranja prostora za čekanje
<b>2.</b>	Mogući gubitak u poslovanju, klijenti odbijaju čekati u redu i odlaze prije pružanja usluge
<b>3.</b>	Mogući gubitak dobre reputacije tvrtke te njezinih usluga
<b>4.</b>	Moguće smanjenje zadovoljstva klijenata
<b>5.</b>	Nepovoljan utjecaj na ostale poslovne procese i/ili klijente tijekom zagušenja sustava, odnosno njegove preopterećenosti

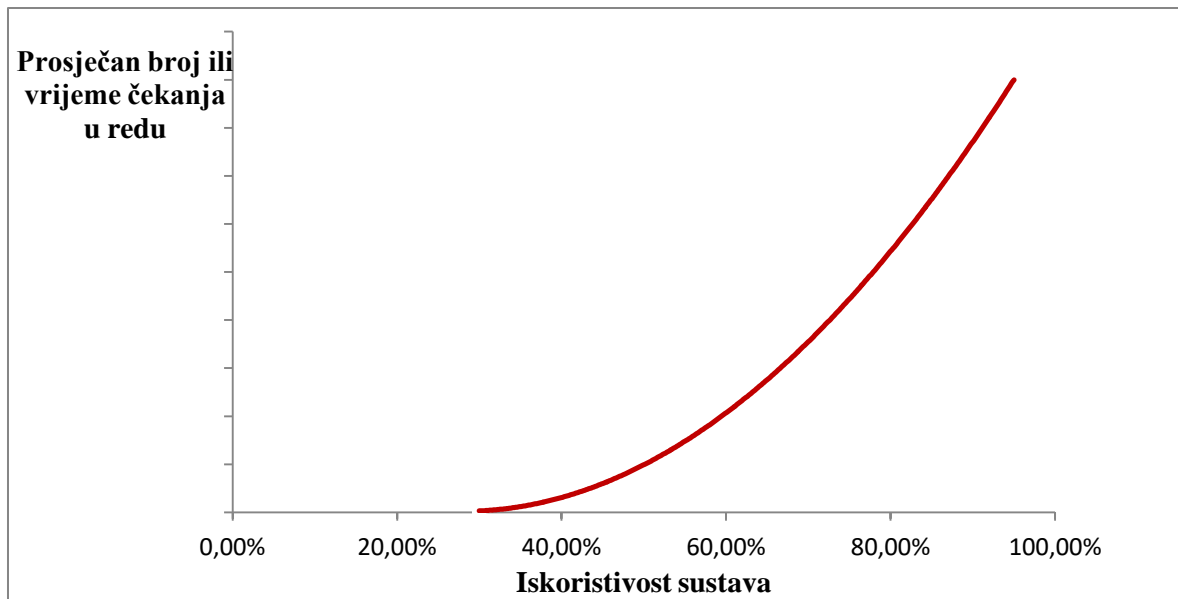
**Tablica 4.** Implikacije menadžera

**Izvor:** (Stevenson, 2009:830)

Stevenson (2009) tvrdi da operativni menadžer obično procjenjuje pet mjera prilikom procjene postojećih ili predloženih sustava usluga. Oni se odnose na potencijalno nezadovoljstvo klijenata i troškove:

1. Prosječni broj klijenata koji čekaju, bilo u redu ili u sustavu.
2. Prosječno vrijeme koje klijenti čekaju, bilo u redu ili u sustavu.
3. Iskoristivost sustava, misleći na postotak iskorištenog kapaciteta sustava.
4. Procijenjeni trošak kapaciteta vezani uz red čekanja.
5. Vjerojatnost da će dolazak klijenta morati pričekati na uslugu.

Od spomenutih mjera, iskoristivost sustava podrazumijeva određenu analizu te prikaz mjera u kojoj su poslužitelji zauzeti, a ne neaktivni. S jedne strane moglo bi se učiniti da bi menadžer želio tražiti stopostotnu iskoristivost sustava. Međutim, prema prikazanoj slici 17 može se steći uvid gdje povećanje iskoristivosti sustava dovodi do povećanja duljine rede čekanja i prosječnog vremena čekanja. Odnosno, vrijednosti postaju izuzetno visoke kako se iskoristivost približava stopostotnom učinku. Dodatna implikacija menadžerima predstavlja i iskoristivost od 100% koju ne žele nikada postići u normalnim okolnostima. Čak i da jest, stopostotna iskoristivost poslužitelja usluge ne vodi dobrome, uglavnom su iza većine klijenata ljudi ili strojevi te i njima treba vremena za odmor. Shodno tome, operativni menadžer trebao bi nastojati postići sustav koji minimalizira zbroj troškova čekanja i troškova kapaciteta.



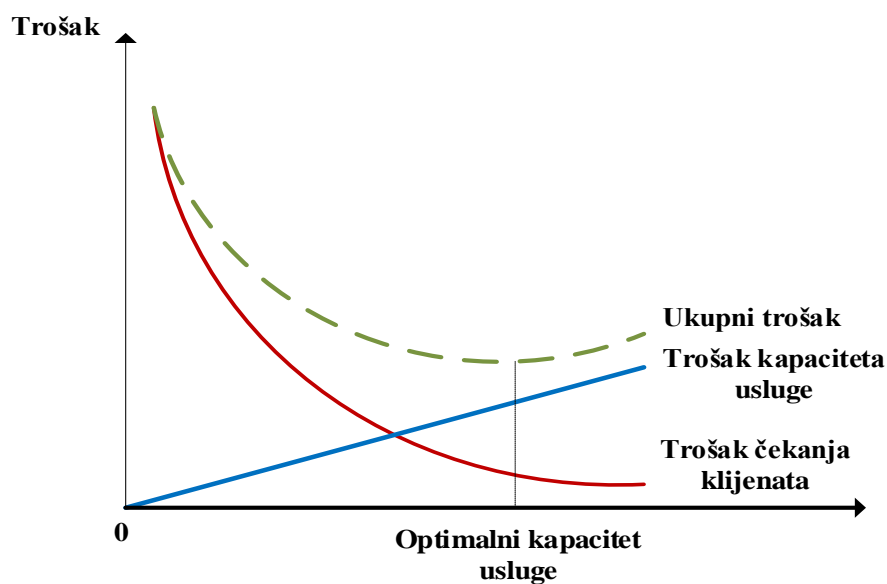
**Slika 17.** Iskoristivost sustava

**Izvor:** (Stevenson, 2009:836)

## 6.2. Tradicionalni odnos troškova

Općenito postoji obrnuta veza između troškova usluge i troškova čekanja, kao što se odražava na krivulji troškova na slici 18. Kako se razina usluge, određena brojem poslužitelja, povećava, cijena usluge raste, dok se troškovi čekanja smanjuju. U tradicionalnom pogledu na analizu vremena čekanja, razina usluge trebala bi se podudarati s minimalnom točkom na krivulji ukupnih troškova.

Trošak pružanja usluge obično se odražava na troškove poslužitelja, kao što su troškovi bankara u banci, poštara na šalteru poštanskih ureda ili servisera u postrojenju. Povećavanjem broj servera radi smanjenja vrijeme čekanja, povećava se i cijena usluge. „Trošak usluge je obično izravan i jednostavan za izračun. Trošak čekanja nije tako lako odrediti. Glavna odrednica troškova čekanja je gubitak posla koji bi mogao rezultirati jer se klijenti umore od čekanja i odlaze. Klijenti odlaze po proizvod ili uslugu negdje drugdje. Ovaj poslovni gubitak može biti privremeni (jedanput) ili trajni (klijent se nikad ne vrati).“ (Russell, Taylor III, 2000:774-775) Trošak zbog gubitka posla posebno je teško odrediti, jer nije dio uobičajenih računovodstvenih evidencija, iako neke trgovačke organizacije za posao i industriju povremeno dostavljaju takve podatke. Ostale vrste troškova čekanja uključuju gubitak vremena proizvodnje i plaće za poslužitelje koji čekaju da koriste strojeve ili opremu, utovaraju i istovare vozila i tako dalje.



**Slika 18.** Krivulje troškova

**Izvor:** (Stevenson, 2009:831)

Klijenti iz reda čekanja ulaze u red radi dobivanja očekivane usluge te nakon dobivanja iste napuštaju sustav. Broj klijenata sustavu (koji čeka uslugu ili su usluženi), mijenja se učestalo i nasumično tijekom vremena. Najvažniji cilj upravljanja redovima čekanja u stvarnosti je smanjiti ukupne troškove. Postoje dvije osnovne kategorije prema Stevenson (2009) troškova u situaciji čekanja: one povezane s klijentima koji čekaju uslugu i one povezane s kapacitetom.

$$\text{Ukupni trošak (TC)} = \text{trošak čekanja klijenta} + \text{trošak kapaciteta}$$

Trošak kapaciteta odnosi se na troškove održavanja sposobnosti pružanja usluga. Primjeri uključuju broj mjesta u samposlužnoj autopraonici, broj blagajni u supermarketu, broj mehaničara u mehaničarskim radionicama, broj traka na autocestama i sl. Ako objekt koji pruža usluge radi u praznom hodu, gubi se kapacitet jer se on ne može pohraniti.

Troškovi klijenta uključuju:

- plaće poslužitelja dok čekaju na uslugu – mehaničari koji čekaju alate, vozači kamiona koji čekaju istovar
- trošak osiguranja prostora za čekanje – veličina liječničke čekaonice, duljina prilazne staze u autopraonicama, gorivo koje troše avioni koji čekaju slijetanje

- svaki gubitak posla zbog klijenta – odbijaju čekati i možda odlaze drugdje u budućnosti

Uobičajena poteškoća s kojom se često može susresti je smanjivanje troškova čekanja klijenata. Ponajviše iz razloga što glavni dio tog troškova nisu opće dio računovodstvenih podataka. Jedan od pristupa koji se često koristi je upravo tretiranje vremena čekanja ili duljine reda. Menadžer tako određuje prihvatljivu razinu čekanja i usmjerava na uspostavljanje kapaciteta za postizanje te razine.

Cilj upravljanja redovima čekanja je uspostaviti ravnotežu troškova pružanja razine usluge s troškovima klijenata koji čekaju na uslugu. Slika 18. ilustrira ovaj koncept, a treba primijetiti da se s povećanjem kapaciteta povećava i njegov trošak. „Radi jednostavnosti, povećanje se prikazuje kao linearni odnos. Iako je step funkcija često prikladnija, uporaba linearnog pravca ne narušava značajno sliku. Kako se kapacitet povećava, broj klijenata koji čekaju i vrijeme koje dok čekaju smanjuje se, smanjujući na taj način troškove čekanja. Krivulja ukupnog troška prikazuje se krivuljom oblika slova „U“, poput izgleda trgovačkih brodova. Cilj analize je identificirati razinu sposobnosti pružanja usluge koja umanjuje ukupne troškove.“ (Stevenson, 2009:831-832) U situacijama kada oni koji čekaju u redu su klijenti (ne poslužitelji, zaposlenici) postojanje linija čekanja može se negativno odraziti na imidž kvalitete organizacije. Upravo je to razlog zašto pojedine organizacije pridaju većinu pozornosti na pružanje brže usluge, ubrzavanje brzine isporuke, a ne samo na povećanje broja poslužitelja. Pružanjem brže usluge postiže se utjecaj na pomicanje krivulje ukupnog troška prema dolje, odnosno ako se troškovi klijenta koji čekaju smanje za više od troškova brže usluge.

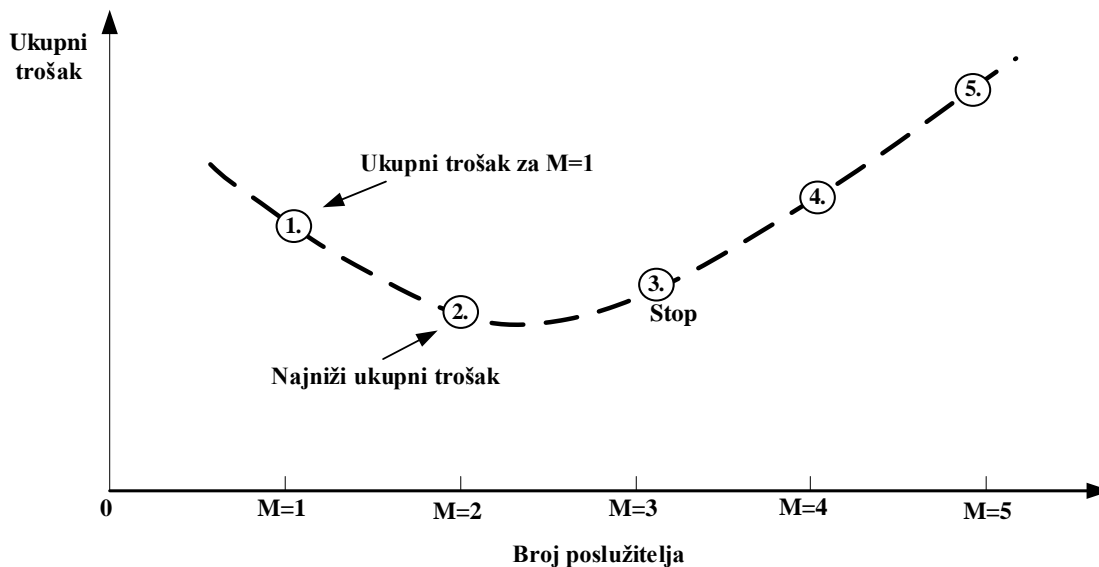
### **6.3. Kvaliteta i analiza troškova**

Suvremeni pristup upravljanju kvalitetom prema Russell i Taylor III (2000) pretpostavlja da je tradicionalni odnos kvalitete i troškova kratkoročna perspektiva koja podrazumijeva potencijalni dugoročni gubitak poslovanja zbog loše kvalitete. Dugoročno gledano, viša razina kvalitete dobit će tržišni udio i povećati poslovanje, a time je i isplativija. Nadalje, kako se tvrtka fokusira na poboljšanje kvalitete usluge, troškovi postizanja dobre kvalitete bit će manji zbog inovacija u procesima i dizajna rada. To je filozofija "nula nedostataka", što u analizi linija čekanja znači da nema čekanja. Ova razina kvalitetnije, odnosno brže usluge dugoročno će povećati poslovanje i biti isplativija nego što to podrazumijeva tradicionalni prikaz.

Alternativa poboljšanju kvalitete usluge, smanjenjem vremena čekanja, je učiniti čekanje ugodnijim pružanjem preusmjeravanja. Čekaonice, poput liječničke ordinacije, pružaju časopise i novine koje klijenti mogu čitati dok čekaju. Televizori su povremeno dostupni u čekaonicama za popravak automobila, u terminalima zračnih luka ili u barovima i salonima restorana u kojima kupci čekaju. U Disney World-u prilagođeni likovi zabavljaju posjetitelje parka dok čekaju na red za vožnju. Zrcala su namjerno smještena u blizini dizala kako bi odvratila pažnju dok ljudi čekaju. Supermarketi postavljaju časopise i ostale artikle "impulzivne kupovine" na blagajni, ne samo radi preusmjeravanja klijenata dok čekaju, već i kao potencijalnu kupovinu. Sve su ove taktike osmišljene kako bi poboljšale kvalitetu usluge koja zahtijeva čekanje, a da zapravo ne dovede do troškova smanjenja vremena čekanja.

Dizajn sustava usluge često odražava želju uprave da uravnoteži troškove kapaciteta s očekivanim troškovima klijenata koji čekaju u sustavu. Treba imati u vidu da se troškovi čekanja klijenta odnose na troškove koje organizacija pretrpi zbog čekanja klijenta. Optimalni kapacitet (obično broj kanala) je onaj koji umanjuje zbroj troškova čekanja i kapaciteta ili troškova poslužitelja. Najjednostavniji pristup analizi troškova prema Stevenson (2009) uključuje računanje troškova sustava, odnosno izračunavanje troškova za klijente u sustavu i ukupnih troškova kapaciteta. Trošak kapaciteta obično je funkcija broja poslužitelja. Budući da je krivulja ukupnih troškova u obliku slova U, obično će se ukupni trošak u početku smanjivati s povećanjem kapaciteta, a zatim će na kraju početi rasti. Jednom kad se počne povećavati, dodatna povećanja kapaciteta uzrokovat će njegov daljnji rast. Stoga, nakon što se to dogodi, može se lako utvrditi optimalna veličina kapaciteta.

Prema slici 19. prikazano je traženje optimalnog rješenja ukupnih troškova. Broj poslužitelja se postupno dodavao, može se uočiti da se ukupni trošak u slučaju jednog poslužitelja smanjio. Nakon dodavanja drugog poslužitelja, troškovi i dalje opadaju, no nakon dodavanja trećeg poslužitelja može se uočiti rast ukupnih troškova. Optimalno rješenje je naočigled jasno, a to su dva poslužitelja, tj.  $M=2$ . Ne postoji potreba za izračunavanjem ukupnih troškova za kasnije dodane poslužitelje (nakon drugog). Samim pogledom na sliku 19. uočava se da će ukupni troškovi nastaviti rasti, dodavanjem sve više poslužitelja. Iako je u mnogim slučajevima početna točka  $M=1$ , pravilo je započeti s najmanjim brojem poslužitelja za koje je sustav nedovoljno opterećen.



**Slika 19.** Krivulja ovisnosti ukupnog troška o broju poslužitelja

**Izvor:** (Stevenson, 2009:845)

Izračun troškova čekanja klijenata temelji se na prosječnom broju klijenata u sustavu. Makar često se smatra da je logičnije temelje stvarati na principu vremenu čekanja klijenata u sustavu. Međutim, taj bi se pristup odnosio samo na jednog klijenta. Ne bi predstavljao informacije o tome koliko će klijenata isto toliko vremena čekati u sustavu. Očito je da bi prosječno pet klijenata na čekanju uključivalo niže troškove čekanja nego da ih je prosječno devet na čekanju. Iz tog razloga potrebno se fokusirati na broj koji čeka. Štoviše, ako su u sustavu prosječno dva klijenta, bilo bi to ekvivalentno postojanju točno dva klijenata u sustavu cijelo vrijeme. No u stvarnosti će biti trenutaka kada je nula, jedan, dva, tri ili više klijenata u sustavu.

Budući da troškovi čekanja klijenata i troškovi kapaciteta često odražavaju procijenjene iznose, prividno optimalno rješenje možda neće predstavljati pravi optimum. Jedna od posljedica ovoga je da kad se izračuni prikažu s brojkama, čini se da ukupni podaci o troškovima podrazumijevaju veći stupanj preciznosti nego što je to stvarno opravdano procjenama troškova. Ovome se pridružuje činjenica da stope dolaska i usluge mogu biti približno aproksimativne ili ne moraju biti točno predstavljene Poissonovom, odnosno eksponencijalnom distribucijom. Druga posljedica je da ako se procjene troškova mogu dobiti u određenim rasponima (npr. koliko će novčano iznositi čekanje klijenta po satu), ukupni troškovi trebaju se izračunati za oba slučaja. Ti slučajevi predstavljaju najnižu procjenu određenog raspona, te najvišu procjenu radi utvrđivanja učinkovitosti optimalnog rješenja. Na

upravi je odluka hoće li uložiti dodatne napore kako bi se dobile preciznije procjene troškova ili odabrati jedno od dva navedena optimalna rješenja.

#### **6.4. Upravljanje ograničenjima**

Menadžeri mogu smanjiti vrijeme čekanja aktivnim upravljanjem jednim ili više ograničenja sustava. Kratkoročno je uobičajeno da su veličina objekta i broj poslužitelja fiksni resursi. Međutim, prema Stevenson (2009) mogu se razmotriti neke druge mogućnosti:

##### 1. Korištenje privremenih radnika

Korištenje privremenih radnika ili radnika na pola radnog vremena tijekom teških razdoblja. Kompromisi mogu uključivati troškove osposobljavanja, probleme s kvalitetom i možda sporiju uslugu nego što bi je pružali redovni radnici.

##### 2. Promjena potražnje

U situacijama u kojima se potražnja razlikuje prema dobu dana ili dijelu tjedna (npr. vikendi.), varijabilne strategije cijena mogu biti učinkovite u ujednačavanju potražnje u sustavu. Kazališta koriste ovu opciju s nižim cijenama za prebacivanje potražnje iz „udarnih“ termina predstava u one kasnije ili ranije termine. Restorani nude niže cijene za klijente koji dolaze na doručak, kafići za klijente koji rano ujutro dolaze na ispijanje kave. Neke maloprodajne trgovine nude kupone koji vrijede samo određeno vrijeme ili na određeni dan.

##### 3. Ponuda standardiziranih usluga

Može se primijetiti učinak konstantne usluge i redova čekanja u usporedbi s varijabilnom uslugom. Zaključaj je jednostavan, broj klijenata u redu i vrijeme provedeno čekajući su prepolovljeni. Što se više usluga standardizira, raste utjecaj na redove čekanja.

##### 4. Potreba za uskim grlom

Jedan od dijelova procesa može biti u velikoj mjeri odgovoran za sporu stopu usluge. Poboljšanje tog dijela procesa moglo bi dovesti do nerazmjernog povećanja stope usluge. Poslužitelji često imaju uvid kako to iskoristiti.

Zabavni park Walt Disney vodeći su u učinkovitom upravljanju redovima čekanja. Disneyjevi ljudi predstavljaju seminare o upravljanju linijama čekanja. Njihov uspjeh može poslužiti kao mjerilo i pružiti dragocjene uvide za širok spektar usluga. Disneyjeve metode posebno su relevantne kada okolnosti onemogućuju brzo dodavanje kapaciteta za ublažavanje vremena čekanja. Evo nekoliko metoda koje Disney koristi za postizanje zadovoljstva klijenata:

1.	Ometanje (distrakcija)	Disneyevi likovi zabavljaju klijente, videozapisima pružaju sigurnosne informacije i stvaraju uzbuđenja za iščekivane atrakcije, prodavači se kreću uz redove prodajući hranu i piće, a drugi prodavači prodaju suvenire.
2.	Osigurati alternativu klijentima koji su to spremni platiti (premium)	Disney nudi svoj sustav brzog prolaska koji omogućava klijentima da rezerviraju vrijeme kada će im biti dopušteno zaobići redovnu liniju čekanja, ponekad koristeći zaseban ulaz. Predstavlja izniman potencijal za povećanje zadovoljstva klijenata omogućavajući klijentima da uživaju u više događaja, kao i potencijal za stvaranje dodatnih prihoda dok klijenti posjećuju koncesije za hranu i suvenirnice. Druga metoda je prodaja propusnica koje omogućavaju klijentima da ranije uđu u park.
3.	Držati klijente informiranim	Jasno su postavljeni znakovi koji daju približno vrijeme čekanja od svake točke, omogućujući klijentima da odluče hoće li se pridružiti redu i što da očekuju.
4.	Nadmašiti očekivanja	Vrijeme čekanja bude kraće od procijenjenih, čime se premašuju očekivanja klijenata. Također, događaj vrijedi pričekati.
5.	Ostale metode	Disney održava ugodno okruženje za čekanje. Redovi čekanja su često unutra, zaštićeni od vremenskih uvjeta. Redovi se stalno kreću, ostavljajući dojam napretka. Polaznici i natpisi usmjeravaju klijenta na dijelove parka koji su manje zauzeti.

**Tablica 5.** Metode za zadovoljstvo klijenata - primjer Walt Disney

**Izvor:** (Stevenson, 2009:856)



## 7. Modeli repova čekanja

### 7.1. Kombinirani dolasci i usluge

Prvi autori koji su definirali klasifikaciju modela repova čekanja bili su Kendall D.G. i Lee A.M. Njihova klasifikacija provela se kroz procese dolazaka, usluga, broj uslužnih mjesta, veličinu prostora za čekanje te pravila usluživanja. Glavne karakteristike repova čekanja definirane su standardizacijom u idućem kratkom obliku pisanja: (Taha, 1992:554), (Barković 2001:405)

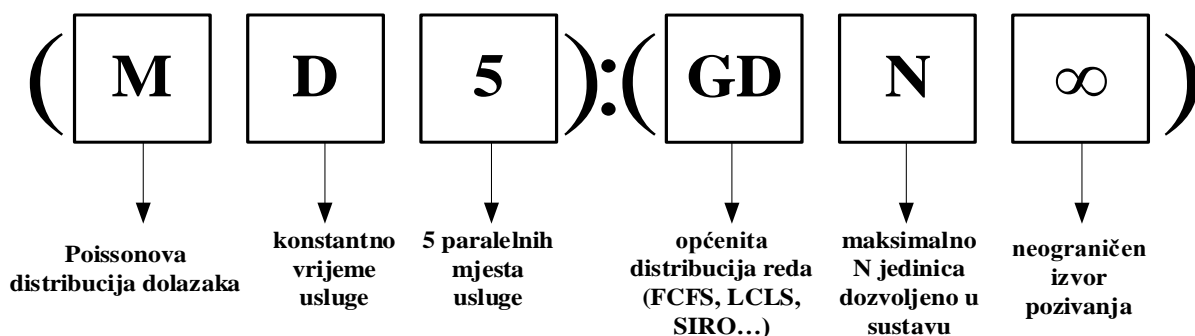
$$(a / b / c):(d / e / f),$$

gdje simboli a, b, c, d, e i f predstavljaju osnovne elemente modela repova kako slijedi:

- a – distribucija dolazaka
- b – distribucija usluge
- c – broj paralelnih usluga
- d – disciplina u redu
- e – maksimalan broj dozvoljen u sustavu (u repu + usluzi)
- f – veličina izvora pozivanja.

Standardizirani simboli a i b (dolasci i usluge), zamjenjuju se idućim oznakama:

- M – Poissonova ili Markovljeva distribucija dolaska ili odlaska (ili ekvivalentna eksponencijalna distribucija međuodlazaka ili usluge)
- D – konstantan ili deterministički međuodlazak ili vrijeme usluge
- $E_k$  – Erlangova ili gama ( $\gamma$ ) distribucija međuodlazaka ili usluge s parametrom k
- GI – općenita nezavisna distribucija dolazaka
- G – općenita distribucija odlazaka ili vremena usluge



Slika 20. Primjer standardizacije modela repa čekanja

Izvor: (Vlastita izrada autora)

## 7.2. Osnovni Poissonov model

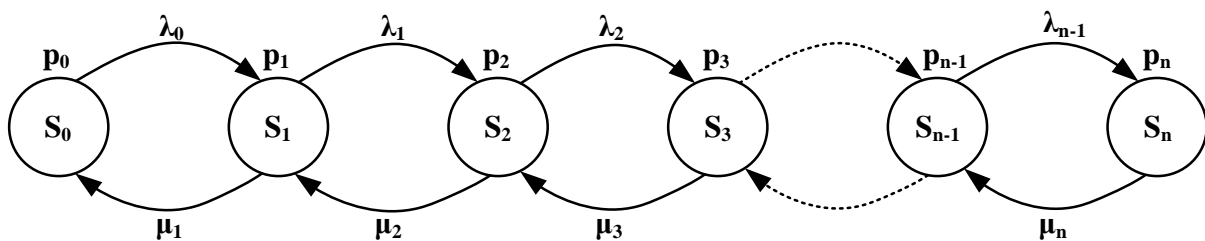
Opći ili osnovni Poissonov model temelji se na pretpostavci da se u repu čekanja dolasci i odlasci (usluživanje) klijenata ponašaju u skladu s Poissonovom, odnosno eksponencijalnom distribucijom. Također, bitna je i pretpostavka da trenutno stanje sustava ovisi samo o događaju u prethodnom i budućem stanju.

Dvije osnovne veličine koje se primjenjuju u Poissonovim repovima prema Schonberger i Knod (1988) su:

- $\lambda$  - očekivana stopa dolazaka klijenata (prosječan broj dolazaka klijenata u jedinici vremena). Povezuje se s prosječnim vremenom međudolazaka (vrijeme između dolaska jednog klijenta ( $n$ ) i sljedećeg klijenta ( $n+1$ )) koja se računa kao  $\frac{1}{\lambda}$ .
- $\mu$  - očekivana stopa davanja usluga (prosječan broj usluga u jedinici vremena). Povezuje se s prosječnim vremenom trajanja usluga koja se računa kao  $\frac{1}{\mu}$ .

U nepoissonovim repovima vrijednosti  $\lambda$  i  $\mu$  zamijenjene su varijancom i standardnom devijacijom.

Upotrebom  $\lambda_n$  (dolazak klijenta),  $\mu_n$  (odlazak klijenta) te  $p_n$  (vjerojatnost) gdje se pretpostavlja da je točno  $n$  klijenata u sustavu, moguće je prikazati slijed događaja dijagramom (slika 21).



**Slika 21.** Dijagram promjene (dolazaka i odlazaka) klijenata

**Izvor:** (Barković, 2011:249)

Prema dijagramu može se definirati svako stanje sustava ( $S_{p1}$ ,  $S_{p2}$ ,  $S_{p3}$ , ...) koje ostvaruje komunikaciju samo sa stanjem koje mu prethodi te dolazi iza njega. Faktor odvijanja svake promjene stanja označava se kratkim vremenskim intervalom  $h$ . Prema Barković (2011) trenutak promatranja svakog stanja definirano je slovom  $t$ , a vremenski interval  $t+h$ , gdje  $h$  predstavlja malu vremensku jedinicu u kojoj postoji mogućnost samo jedne promjene dolaska

( $\lambda_n$ ) ili odlaska ( $\mu_n$ ) jednog klijenta. Promatrajući npr. stanje gdje je u sustavu točno jedan klijent ( $S_1$ ) s pripadajućom vrijednosti  $p_1$ . Tijekom vremenskog intervala  $t+h$  postoji mogućnost dolaska još jednog klijenta (strelica s oznakom  $\lambda_1$ ) ili odlaska jednog klijenta (strelica s oznakom  $\mu_1$ ). Ova dva slučaja u izravnoj su korelaciji sa stanjem  $S_1$  te ih se iz tog razloga smatra funkcijom od  $p_1$ . Takvi događaji vezuju se uz „odlaske“ jer se na takav način stanje  $S_1$  mijenja u stanje  $S_0$  (nema nijednog klijenta u sustavu) ili u stanje  $S_2$  (točno dva klijenta u sustav). Također, uz stanje  $S_1$  moguća je vezanost događaja „dolazaka“ klijenata, odnosno koje radnje treba provesti za postizanje stanja  $S_1$ . To bi predstavljali odlazak klijenta  $\mu_2$  iz stanja  $S_2$  kao funkcija  $p_2$  te dolazak klijenta  $\lambda_0$  iz stanja  $S_0$  kao funkcija  $p_0$ .

U uvjetima stabilnog stanja (što je pretpostavka za Poissonove modele) očekivana stopa dolazaka i klijenata u sustavu s n klijenata mora biti jednaka. Opći oblik proračuna vjerojatnosti s točno n klijenata u sustavu je:<sup>6</sup>

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1} * \lambda_{n-2} * \dots * \lambda_0}{\mu_n * \mu_{n-1} * \dots * \mu_1} p_0 .$$

Ukoliko su stope dolazaka i odlazaka konstantne, odnosno ukoliko je u uporabi očekivana vrijednost dolazaka i odlazaka klijenata, dolazak se može zamijeniti s  $\lambda$  za svaki  $\lambda_n$ , jednako kao i  $\mu$  za svaki  $\mu_n$ , tako i formula postaje jednostavnija:

$$p_n = \frac{\lambda}{\mu} * p_0 .$$

Zbroj svih vjerojatnosti  $p_0, p_1, \dots, p_n$  iznosi 1, odnosno:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 .$$

Tom činjenicom ostaje mogućnost određivanja vjerojatnosti  $p_0$ :

$$p_0 = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_n .$$

Nakon određenog vremena sustav postaje stabilan, odnosno njegov rep čekanja ne odlazi u beskonačno jer je stopa odlazaka nakon prvog vala (početak radnog vremena i sl.) manja od stope davanja usluga u jedinici vremena. Server dolazi u stanje kada može uslužiti više klijenata nego što je dolazaka istih. Osnovni parametri koji opisuju stabilno stanje su već

---

<sup>6</sup> (Taha, 1992:555-559), (Barković 2001:405), (Stevenson, 2009:837-844), (Hiller, Lieberman, 1974:395-414), (Barković, 2011:248-255)

navedeni u terminologiji, ali dodatno će se još prikazati i naglasiti, jer su oni ključni faktori u ostalim modelima repova čekanja. To su četiri parametra:

- 1)  $L_q$  – očekivani broj klijenata u repu
- 2)  $L_s$  – očekivani broj klijenata u sustavu
- 3)  $W_q$  – očekivano vrijeme čekanja u repu
- 4)  $W_s$  – očekivano ukupno vrijeme koje klijent provede u sustavu (rep+usluga)

Ukoliko se pretpostavi da se radi o repu sa  $S$  paralelnih servera, očekivani broj klijenata u repu iznosi:

$$L_q = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n - S)p_n .$$

Za daljnju razradu potrebna je efektivna stopa dolaska klijenata ( $\lambda_{\text{eff}}$ ), koja predstavlja stvarnu stopu dolaska jer uzima u obzir samo klijente koji dođu i ostanu u repu te budu usluženi, a eliminira sve oni koji su došli i iz nekog razloga napustili sustav prije nego su usluženi. Vrijednost  $\lambda_{\text{eff}}$  se dobiva izračunom:

$$\lambda_{\text{eff}} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n$$

Kada imamo efektivnu stopu dolaska klijenta može se odrediti očekivano vrijeme čekanja ( $W_q$ ) i očekivano ukupno vrijeme provedeno u sustavu ( $W_s$ ):

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{\text{eff}}} \text{ ili } W_q = W_s - \frac{1}{\mu} ,$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{eff}}} \text{ ili } W_s = W_q + \frac{1}{\mu} .$$

Na posljetku dobivamo izračun za očekivani broj klijenata u sustavu:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\mu} .$$

Razlika između očekivanog broja klijenata u sustavu i očekivanog broja klijenata u repu, dobiva se očekivani broj zaposlenih servera (poslužitelja):

$$\bar{S} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\mu} .$$

Postotak zaposlenosti, odnosno postotak iskorištenja sustav sa S paralelnih uslužnih mjesta računa se:

$$\% \text{zaposlenosti} = \frac{\bar{S}}{S} * 100 .$$

### **7.3. Specifični Poissonovi modeli repova i nepoissonovi repovi čekanja**

Specifični Poissonovi modeli proizašli su iz osnovnog modela s određenim promijenjenim uvjetima. Modeli su označeni Kendallovom notacijom, a svima imaju zajedničku stvar u primjeni opće (generalne) discipline sa simbolom GD. Takva disciplina može biti FCFS, LCLS, SIRO ili bilo koji drugi postupak koji koriste poslužitelji za odabir jedinica iz repa da bi počeli uslugu. Priložene formule uz pojedine modele nisu posebno izvođene, jer ono nije potrebno za primjenu. Također, navedene formule vrijede za stacionarno stanje, tj. stanje ravnoteže. U stvarnosti može doći do vrlo složenih slučajeva, što dodatno otežava i onemogućava njihovo proučavanje. Relativno se jednostavno predstavlja analiza repova gdje se distribucije dolaska i vremena davanja usluga ponašaju po Poissonovoj i eksponencijalnoj distribuciji, neovisno da li se radi o primjeni matematičkih formula za pojedine slučajeve ili o gotovim programskim paketima pomoću koji se rješavaju problemi repova.

Kod većine repova kojima se distribucija dolaska i vremena davanja usluga ne ponašaju u skladu s Poissonovom i eksponencijalnom distribucijom, radi svoje kompleksnosti, nužan je poseban pristup. Gdje je prisutna takva situacija, često nastupa primjena simulacija na repove čekanja koje na dosta jednostavan način simuliraju proces u velikom broju. Određeni nepoissonovi repovi čekanja imaju i mogućnosti analitičke obrade. Izuzev klasifikacije repova prema načinu dolaska i odlaska klijenata, odnosno na Poissonove i nepoissonove repove. Obje podjele mogu imati i druge specifične oblike, gdje osim generalne discipline i njezinog načina davanja usluga, postoji i repovi čekanja s prioritetima u davanju usluga. Način funkcioniranja repova čekanja s prioritetima u davanju usluga definiran je u prethodnim poglavljima s priloženim primjerima, no modeli repova čekanja s prioritetima u davanju usluga neće biti prikazani matematičkim formulama niti analitičkim prikazima u ovome radu.

U nastavku poglavlja tablično će biti prikazani specifični Poissonovi modeli, odnosno nepoissonovi modeli uz formule četiri ključna parametra koja opisuju stabilno stanje sustava.

<b>(M/M/1):(GD/∞/∞)</b>	
<p><b>M/M/1</b> – Poissonova distribucija dolazaka i odlazaka te jedno mjesto pružanja usluge</p> <p><b>GD/∞/∞</b> - Općenita disciplina repa (FCFS,LCLS,SIRO...), neograničen broj dozvoljen u sustavu, neograničen izvor kapaciteta</p>	$\mu_n = \mu$ $\lambda_n = \lambda$
$L_s = \frac{\psi}{1 - \psi}$ $L_q = \frac{\psi^2}{1 - \psi}$	$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1 - \psi)}$ $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\psi}{\mu(1 - \psi)}$
<b>(M/M/1):(GD/N/∞)</b>	
<p><b>M/M/1</b> – Poissonova distribucija dolazaka i odlazaka te jedno mjesto pružanja usluge</p> <p><b>GD/N/∞</b> - Općenita disciplina repa (FCFS,LCLS,SIRO...), maksimalno N jedinica dozvoljeno u sustavu, neograničen izvor kapaciteta</p>	$\mu_n = \mu, n = 0,1,2, \dots$ $\lambda_n = \begin{cases} \lambda, n = 0,1,2, \dots, N - 1 \\ 0, n = N, N - 1, \dots \end{cases}$
$L_q = L_s - \frac{\lambda_{eff}}{\mu} = L_s - \frac{\lambda(1 - p_N)}{\mu} = L_s - \psi(1 - p_N)$ $\lambda_{eff} = \mu(L_s - L_q) = \lambda(1 - p_N)$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}} = \frac{L_q}{\lambda(1 - p_N)}$ $W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_s}{\lambda(1 - p_N)}$
<b>(M/M/S):(GD/∞/∞)</b>	
<p><b>M/M/S</b> – Poissonova distribucija dolazaka i odlazaka te S paralelnih uslužnih mjesta</p> <p><b>GD/∞/∞</b> - Općenita disciplina repa (FCFS,LCLS,SIRO...), neograničen broj dozvoljen u sustavu, neograničen izvor kapaciteta</p>	$\mu_n = \begin{cases} n\mu, n \leq S \\ S\mu, n \geq S \end{cases}$ $\lambda_n = \lambda, n \geq 0$
$L_q = \frac{\psi^{S+1} p_0}{(S - 1)! (S - \psi)^2} = \frac{S\psi}{(S - \psi)^2} p_0$ $L_s = L_q + \psi$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$ $W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$

**Tablica 6.** Specifični Poissonovi modeli repa čekanja – 1.dio

**Izvor:** (Taha, 1992:563-577), (Hiller, Lieberman, 1974:414-425), (Barković, 2001:412-427)

<b>(M/M/S):(GD/N/∞)</b>	
<p><b>M/M/S</b> – Poissonova distribucija dolazaka i odlazaka te S paralelnih uslužnih mjesta</p> <p><b>GD/N/∞</b> - Općenita disciplina repa (FCFS,LCLS,SIRO...), maksimalno N jedinica dozvoljeno u sustavu, neograničen izvor kapaciteta</p> <p style="text-align: center;"><math>\bar{S}</math> – prosječan broj iskorištenih poslužitelja</p>	$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n \leq S \\ S\mu, & S \leq n \leq N \end{cases}$ $\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & n > N \end{cases}$
$L_q = \begin{cases} p_0 \frac{\psi^{S+1}}{(S-1)!(S-\psi)^2} \left[ 1 - \left(\frac{\psi}{S}\right)^{N-S} - (N-S) \left(\frac{\psi}{S}\right)^{N-S} \left(1 - \frac{\psi}{S}\right) \right], & \frac{\psi}{S} \neq 1 \\ p_0 \frac{\psi^2(N-S)(N-S+1)}{2S!}, & \frac{\psi}{S} = 1 \end{cases}$	$L_s = L_q + (S - \bar{S})$ $= L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu}$ $\bar{S} = \sum_{n=0}^s (S-n)p_n$
<b>Model samoposluživanja</b>	
<b>(M/M/∞):(GD/∞/∞)</b>	
<p><b>M/M/∞</b> – Poissonova distribucija dolazaka i odlazaka te neograničen broj mjesta pružanja usluga</p> <p><b>GD/∞/∞</b> - Općenita disciplina repa (FCFS,LCLS,SIRO...), neograničen broj dozvoljen u sustavu, neograničen izvor kapaciteta</p>	$\mu_n = n\mu, n \geq 0$ $\lambda_n = \lambda, n \geq 0$
$p_n = \frac{e^{-\psi}\psi^n}{n!}, n = 0,1,2, \dots \quad L_s = \psi$	$W_s = \frac{1}{\mu}$ $L_q = W_q = 0$
<b>Strojni model usluge</b>	
<b>(M/M/R):(GD/K/K), R&lt;K</b>	
<p><b>M/M/R</b> – Poissonova distribucija dolazaka i odlazaka te ograničen broj mjesta pružanja usluge (R)</p> <p><b>GD/K/K</b> - Općenita disciplina repa (FCFS,LCLS,SIRO...), ograničen broj jedinica dozvoljen u sustavu (K), ograničen izvor kapaciteta (K)</p> <p><b>R</b> – broj servisera, <b>K</b> – kvar, broj pokvarenih strojeva</p>	$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n \leq R \\ R\mu, & R \leq n \leq K \\ 0, & n > K \end{cases}$ $\lambda_n = \begin{cases} (K-n)\lambda, & 0 \leq n \leq K \\ 0, & n \geq K \end{cases}$
<p style="text-align: center;"><math>\bar{R}</math> – prosječan broj besposlenih servisera</p> $L_q = \sum_{n=R+1}^K (n-R)p_n \quad \bar{R} = \sum_{n=0}^R (R-n)p_n$ $L_s = L_q + (R - \bar{R}) = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \quad (R \neq 1)$ $\lambda_{eff} = \mu(R - \bar{R}) = \lambda(K - L_s)$	$L_q = K - \left(1 + \frac{1}{\psi}\right) (1 - p_0)$ $L_s = K - \frac{1-p_0}{\psi} \quad (R = 1)$

**Tablica 7.** Specifični Poissonovi modeli repa čekanja – 2.dio

**Izvor:** (Taha, 1992:563-577), (Hiller, Lieberman, 1974:414-425), (Barković, 2001:412-427)

<b>(M/G/1):(GD/∞/∞)</b>	
<p><b>M/G/1</b> – Poissonova distribucija dolazaka, općenita distribucija odlazaka te jedno mjesto pružanja usluge</p> <p><b>GD/ ∞ / ∞</b> - Općenita disciplina repa (FCFS,LCLS,SIRO...), neograničen broj dozvoljen u sustavu, neograničen izvor kapaciteta</p> <p>E(t) – očekivanje, V(t) - varijanca</p>	$\lambda * E(t) < 1$ $\mu = \frac{1}{E(t)}$
$L_s = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \lambda^2 * V(t)}{2(1 - \frac{\lambda}{\mu})}$ $L_q = L_s - \lambda * E(t) = L_s - \frac{\lambda}{\mu}$	$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \text{ ili } W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$ $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$
<b>(M/D/1):(GD/∞/∞)</b>	
<p><b>M/D/1</b> – Poissonova distribucija dolazaka, konstantno vrijeme trajanja usluge te jedno mjesto pružanja usluge</p> <p><b>GD/ ∞ / ∞</b> - Općenita disciplina repa (FCFS,LCLS,SIRO...), neograničen broj dozvoljen u sustavu, neograničen izvor kapaciteta</p> <p>E(t) – očekivanje, V(t) - varijanca</p>	<p><math>V(t) = 0</math> – <i>nema odstupanja od prosječnog trajanja usluge</i></p> <p><math>\mu = konst.</math></p> $p = \frac{\lambda}{\mu}$
$L_s = p + \frac{p^2}{2(1 - p)}$ $L_q = L_s - \lambda * E(t)$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$ $W_s = \frac{L_s}{\lambda}$

**Tablica 8.** Nepoissonovi modeli repa čekanja

**Izvor:** (Taha, 1992:563-577), (Barković, 2001:427-432)



## 8. Model repa čekanja u simulacijskom programu ARENA

ARENA Rockwell predstavlja programski alat za simulaciju i automatizaciju, koristi SIMAN programski jezik te time omogućava izradu simulacijskih modela.<sup>7</sup> Koriste ga mnoge tvrtke koje se učestalo bave simulacijama, npr. IBM, General Motors, Xerox, Nike i mnogi drugi. Alat ARENA u osnovi omogućava:

- Simulacije diskretnih događaja
- Simulacije skupnih i kontinuiranih događaja
- Analizu i predviđanje uspješnosti sustava

User-friendly sučelje omogućava korisnicima brzo stvaranje i optimizaciju modela. Pomoću programskog alata ARENA simuliraju se modeli različitih djelatnosti, kao što su proizvodnja, „call-centri“, transport, lanac nabave, vojne obrane i sl.<sup>8</sup>

Simulacijski modeli se izrađuju jer određeni sustav nije moguće definirati uz primjenu matematičkih proračuna. Naravno, određeni simulacijski modeli se mogu raditi upravo radi provjere određenih matematičkih proračuna i modela. Modeli su obično vrlo kompleksni s većim brojem međusobno vezanih elemenata, slučajnim varijablama te nepravilnom dinamikom ponašanja. „Upravo radi postojanja slučajnih varijabli često je nepohodno izvesti veći broj simulacijskih eksperimenata i provesti statističku analizu rezultata simulacije. Razvoj simulacijskih modela razmjerno je dugotrajan i skup, te zahtijeva poznavanje više različitih metoda i programskih alata. No, ovi su zahtjevi simulacijskog modeliranja razumni kada se uzme u obzir da za kompleksne dinamičke sustave sa slučajnim varijablama nema drugih metoda kojima možemo analizirati rad sustava.“ (Čerić, Varga, 2004)

Simulacijsko modeliranje predstavlja jednu od vodećih suvremenih računalnih metoda modeliranja, a simulacijski proces strukturu rješavanja stvarnih problema uz pomoć simulacijskog modeliranja. Sam proces se prikazuje nizom koraka koji opisuju pojedine faze rješavanja problema.

Osnovni koraci simulacijskog procesa prema Čerić (1993) su:

1. Definicija cilja simulacijske studije
2. Identifikacija sustava

---

<sup>7</sup> Izvor: [http://www.efos.unios.hr/ikelic/wp-content/uploads/sites/4/2013/04/P1\\_Uvod.pdf](http://www.efos.unios.hr/ikelic/wp-content/uploads/sites/4/2013/04/P1_Uvod.pdf) [pristupljeno: 5.rujna 2020.]

<sup>8</sup> Izvor: <http://www.efos.unios.hr/poslovne-simulacije/wp-content/uploads/sites/180/2013/04/Predavanje-5-Simulacijski-programi-i-primjena-diskretne-simulacije.pdf> [pristupljeno: 5.rujna 2020.]

3. Skupljanje podataka o sustavu i njihova analiza
4. Izgradnja simulacijskog modela
5. Izgradnja simulacijskog programa
6. Verificiranje simulacijskog programa
7. Vrednovanje simulacijskog modela
8. Planiranje simulacijskih eksperimenata i njihovo izvođenje
9. Analiza rezultata eksperimenata
10. Zaključci i preporuke

Nedostataka uvijek postoji i uvijek će postojati, što ne mora značiti uvijek nešto loše. Određeni nedostaci pomažu napretku razvoja simulacija u budućnosti. Prednosti simulacijskih modela ima iznimno puno, ali nastojat će se prikazati samo par osnovnih. U tablici 9 prikazano je četiri prednosti i nedostatka simulacijskih modela, koji se najčešće spominju i primjećuju.

<b>Prednosti</b>	<b>Nedostaci</b>
Mogućnost opisivanja i rješavanja složenih dinamičkih problema sa slučajnim varijablama	Radi statističkog karaktera simulacije potrebno izvođenje većeg broja simulacijskih eksperimenata za dobivanje odgovarajućeg uzorka rezultata simulacija
Uvjeti eksperimentiranja pod kontrolom	Razvoj modela dug i skup
Vrednovanje i analiza logike i dinamike rada sustava olakšani	Vrednovanje modela dosta složeno, zahtijeva dodatne eksperimente
Rješavanje raznovrsnih problema, analiza rada, predviđanje, oblikovanje...	Za ispravno korištenje, potrebno je poznavanje više različitih modela i alata

**Tablica 9.** Prednosti i nedostaci simulacijskih modela

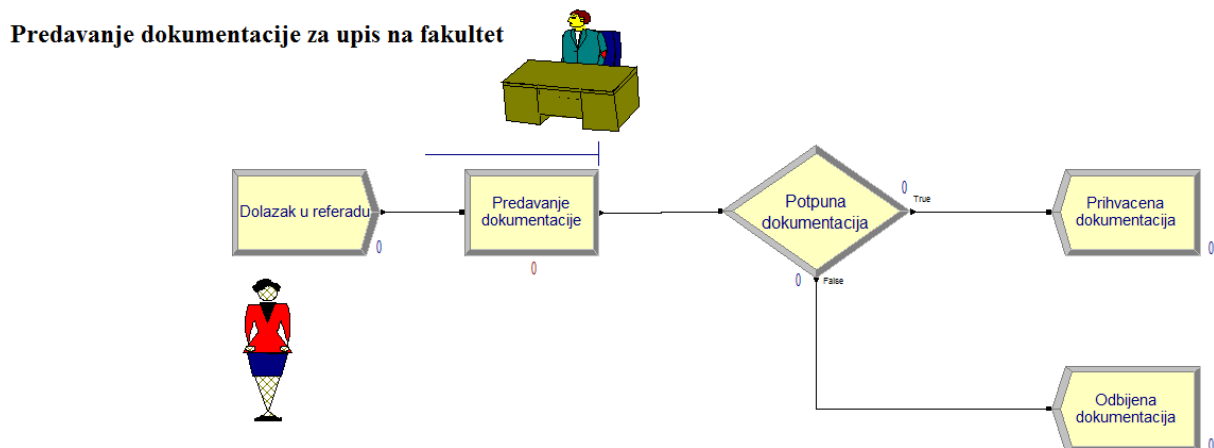
**Izvor:** (Čerić, 1993:30-31)

### **8.1. Izrada simulacijskog modela repa čekanja**

Simulacijski model kako je već prethodno spomenuto, izrađen je uz pomoć programskog alata ARENA Simulation. Model se radio u svrhu prikaza simulacije rada referade fakulteta, odnosno jednog radnog mjesta u studentskoj referadi pri upisu studenata u novu akademsku godinu. Na temelju modela nastoji se prikazati realan rep čekanja za prosječan fakultet u Osijeku, odnosno u ovome slučaju ekonomski fakultet. Izrađeni model prikazat će se slikom, te detaljno objasniti svaki pojedini element u sustavu. Svrha simulacije je prikazati rad

referade fakulteta, promotriti koliko je potrebno zaposlenih u tom vremenskom periodu te iskorištenost samih zaposlenih. Naravno, najvažnije je promotriti rep čekanja, odnosno u kojem je obujmu i vremenu trajanja. Svaka organizacija mora biti dobro organizirana, inače se pojavljuje dosta praznog hoda te nagomilavanja nepotrebnih troškova.

Simulacijski model prikazan slikom 22. predstavlja primjer upisa studenata na fakultet, odnosno predavanja dokumenata potrebnih za upis na fakultet u studentsku referadu.



**Slika 22.** Primjer modela izrađen u ARENA Simulation

**Izvor:** (Vlastita izrada autora)

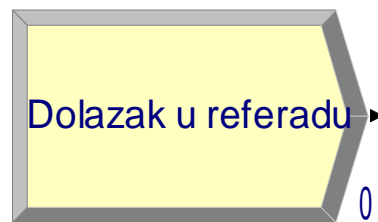
Model prikazan slikom 22. napravljen je pomoću dijagrama tijeka procesa, sastoji se od pet komponenti koje će biti detaljnije definirane. Prikazani simulacijski model prema Kendall i Lee klasificirao bi se kao često nazivan najjednostavniji model,  $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$ . Takva vrsta modela definira se Poissonovom, odnosno eksponencijalnom distribucijom dolazaka i odlazaka. Također, sastoji se od samo jednog mjesta pružanja usluge, a disciplina repa je općenita (FCFS, LCLS, SIRO,...). Broj dozvoljen u sustavu, kao i izvor pozivanja klijenata je neograničen. Moduli ili komponente procesa koje se ubrajaju u osnovne elemente programskog alata ARENA Simulation su<sup>9</sup>:

- Create – početak tijeka procesa, entiteti ovdje ulaze u simulaciju
- Dispose – kraj tijeka procesa, entiteti ovdje izlaze iz simulacije (uklanjaju se)
- Process – aktivnost, koju obično izvodi jedan ili više resursa te zahtijeva određeno vrijeme za izvršavanje
- Decide – grananje u tijeku procesa

<sup>9</sup> Izvor: [http://www.efos.unios.hr/poslovne-simulacije/wp-content/uploads/sites/180/2013/09/Arena\\_Basic\\_Edition\\_User\\_s\\_Guide11.pdf](http://www.efos.unios.hr/poslovne-simulacije/wp-content/uploads/sites/180/2013/09/Arena_Basic_Edition_User_s_Guide11.pdf) [pristupljeno: 5.rujna 2020.]

- Batch – prikuplja određeni broj entiteta prije nego što nastave obradu
- Separate – dvostruki entiteti za istovremenu ili paralelnu obradu ili razdvajanje na prethodno uspostavljene serije entiteta
- Assign – promjena vrijednosti nekog parametra (tijekom simulacije), npr. tip entiteta ili model varijable
- Record – prikupljanje statistike, npr. broja entiteta ili vremena ciklusa

Svaki dijagrama procesa započinje modulom „Create“, koji prikazuje dolaske entiteta. Upravo entiteti predstavljaju elemente procesa, u ovom primjeru to su studenti, koji prolaze kroz proces te imaju svoje određene attribute (svojstva). Modul „Create“ nazvan je „Dolazak u referadu“, a tip entiteta definiran je kao „Student“. Ograničenje dolazaka entiteta u jednom dolasku je ograničen na jedan, a vrijeme između dolazaka modelirano je eksponencijalnom distribucijom s vrijednošću od 15 minuta. Maksimalan izvor pozivanja, odnosno dolazaka studenata je neograničen.



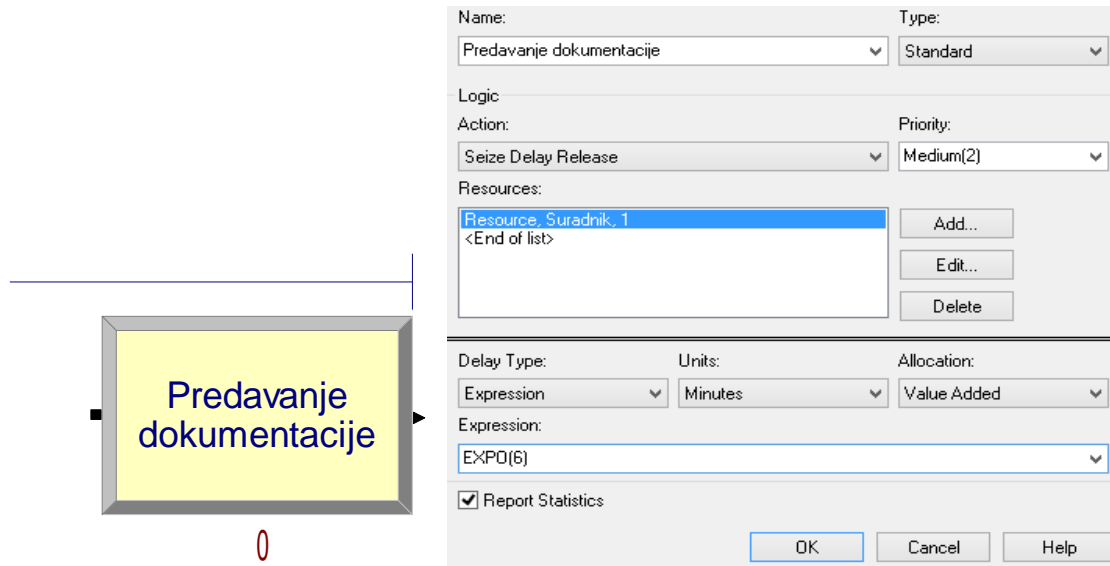
Name:		Entity Type:
Dolazak u referadu		Student
Time Between Arrivals		
Type:	Value:	Units:
Random (Expo)	15	Minutes
Entities per Arrival:	Max Arrivals:	First Creation:
1	Infinite	0.0
<input type="button" value="OK"/> <input type="button" value="Cancel"/> <input type="button" value="Help"/>		

**Slika 23.** Prikaz „Create“ modula s definiranim parametrima

**Izvor:** (Vlastita izrada autora)

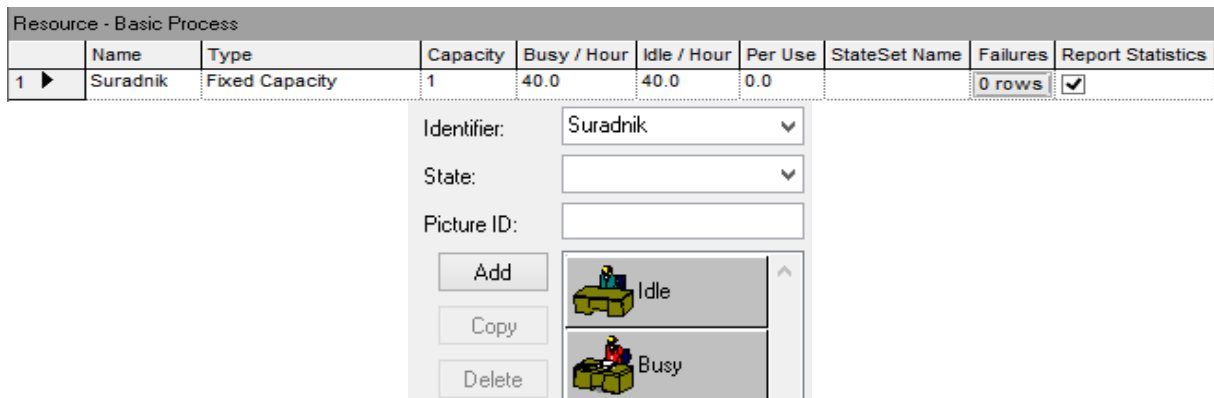
Drugi modul na koji se nastavlja prethodni „Dolazak u referadu“, je modul „Process“. Takva vrsta modula predstavlja određenu aktivnost, koju obično obavlja resurs u kojem zahtijeva određeno vrijeme da se izvrši. Modul je nazvan „Predavanje dokumentacije“, a resurs koji obavlja operacije „Suradnik“. Tip modula je „Seize-Delay-Release“, što označava prihvaćanje studenta, usluživanje i obrada te otpuštanja studenata nakon obrađivanja. Alokacija je „Value

Added“, a resurs „Suradnik“ ima fiksni kapacitet, prima jedan po jedan entitet (student) i satnica mu iznosi 40 kn. „Delay“ dio procesa, odnosno obrada (usluživanje) ponaša se po eksponencijalnoj distribuciji s parametrom 6 te vremenska jedinica su minute.



**Slika 24.** Prikaz „Process“ modula s definiranim parametrima

**Izvor:** (Vlastita izrada autora)



**Slika 25.** Definiranje parametara resursa „Suradnika“

**Izvor:** (Vlastita izrada autora)

Resurs „Suradnik“ definiran je i ilustracijama koje se mijenjaju tijekom pokretanja simulacije, koje prikazuju kada je suradnik slobodan, odnosno zaposlen (slika 25.). Rep čekanja definiran je FIFO disciplinom, koja se češće naziva FCFS, prvi dolazi – prvi uslužen. U programskom alatu ARENA Simulation koje su još dostupne discipline prikazano je slikom 26.

Queue - Basic Process				
	Name	Type	Shared	Report Statistics
1 ▶	Predavanje dokumentacije.Queue	First In First Out	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

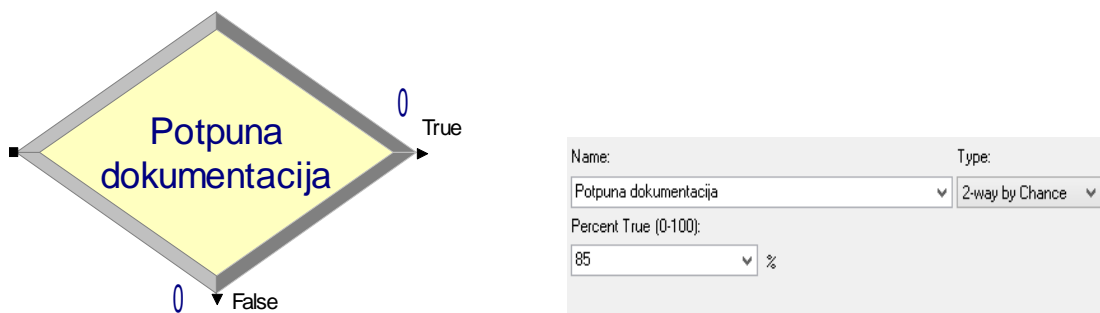
Double-click here to add a new row.

- First In First Out
- Last In First Out
- Lowest Attribute Value
- Highest Attribute Value

**Slika 26.** Definiranje discipline repa, odnosno pružanja usluge

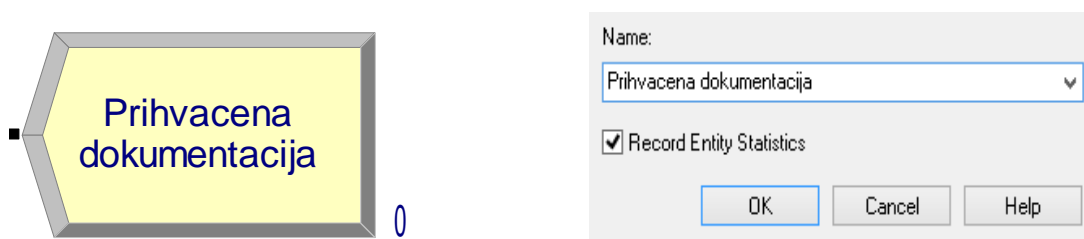
**Izvor:** (Vlastita izrada autora)

Modul „Decide“ predstavlja određeno grananje, te se u ovom primjeru naziva „Potpuna dokumentacija“. Tip odluke je postavljen na „2-way by Chance“ što predstavlja samo dva moguća slučaja, a ta dva slučaja ovise o nazivu modula te ishodu koji je u 85% slučajeva „True“. Odnosno, ukoliko je dokumentacija studenta potpuna, a vjerojatnost je 85% da je sve ispravno, student nastavlja odlazaka na „Dispose“ modul „Prihvaćena dokumentacija“. Ako je 15% studenata nešto pogriješilo ili nije dostavilo potpunu dokumentaciju nastavlja svoj odlazak prema modulu „Neprihvaćena dokumentacija“. Oba modula prihvatanja dokumentacije su jednaka i ne treba se ništa definirati osim njihova naziva, a predstavljaju kraj procesa.



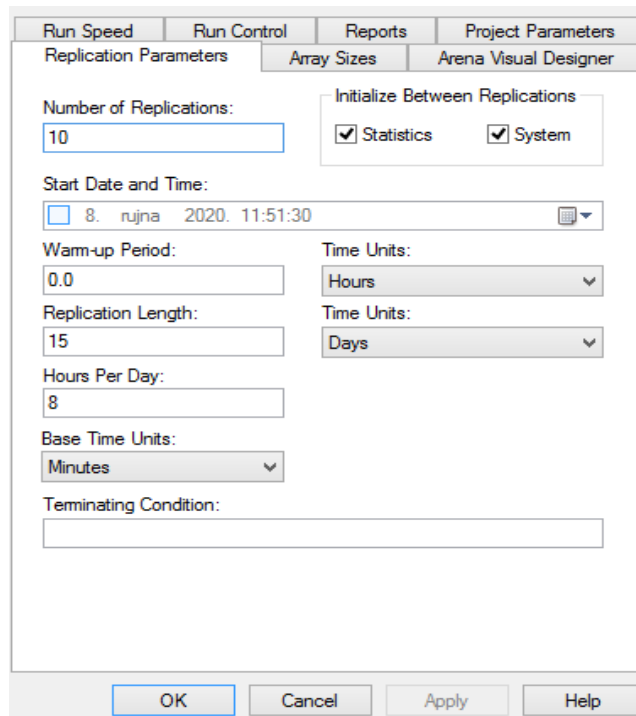
**Slika 27.** Prikaz „Decide“ modula s definiranim parametrima

**Izvor:** (Vlastita izrada autora)



**Slika 28.** Prikaz „Dispose“ modula

Parametri simulacija podešeni su na 10 replikacija, 15 dana, te 8 sati u danu, gdje su bazna vremenska jedinica minute. Standardno radno vrijeme se postavilo na 8 sati u danu, a 15 dana je broj koliko traje dostava dokumentacije za upis (otprilike 3 tjedna).

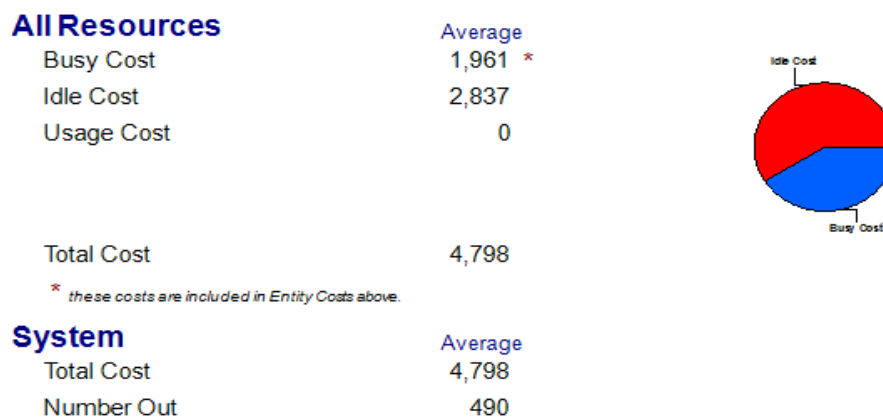


**Slika 29.** Definiranje parametara simulacije

**Izvor:** (Vlastita izrada autora)

## 8.2. Rezultati simulacijskog modela repa čekanja

Kod pokretanja simulacije prolazi se kroz 10 replikacija simulacijskog modela te nakon završetka istih, dostavljaju se izvješća koja su se označila kao potrebna. U prikazanom simulacijskom modelu, prva stranica glavnog izvještaja prikazuje mali dijagram troškova kada suradnik (resurs) radi, odnosno ne radi. Također, prikazani su podaci koliko je studenata usluženo u referadi te dovršilo proces, kao i koliki su ukupni troškovi simulacije (slika 30.).



**Slika 30.** Rezultati simulacije i dijagram troškova

**Izvor:** (Vlastita izrada autora)

Radi preglednosti najvažnijih podataka koji su se dobili simulacijskim modelom, nastojat će se tablicom 10 pokriti većina izvještaja.

Ukupan trošak poslodavca	<b>4.798,26 kn</b>
Trošak kad je suradnik zauzet (kad radi)	<b>1.961,00 kn</b>
Trošak kad je suradnik slobodan (kad ne radi)	<b>2.837,26 kn</b>
Broj studenata koji su predali dokumentaciju u referadi	<b>490</b>
Prosječno vrijeme studenta provedeno u procesu	<b>10.09 min</b>
Prosječno vrijeme čekanja studenta u procesu	<b>4.09 min</b>
Prosječno vrijeme čekanja studenta gdje je potreban suradnik	<b>6.00 min</b>
Udio vremena koji je suradnik bio zauzet	<b>40,89%</b>
Udio vremena koji je suradnik bio slobodan	<b>59,11%</b>

**Tablica 10.** Rezultati simulacije

**Izvor:** (Vlastita izrada autora)

Također, u simulacijskom modelu ključno je promatrati repove čekanja koji su uzrok rada same simulacije. U nastavku se dobiva uvid u izvještaj o repovima čekanja pri predavanju dokumentacije suradniku u referadi fakulteta.

Queue						
Time						
Waiting Time	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average	Minimum Value	Maximum Value
Predavanje dokumentacije.Queue	4.0902	0,53	3.2140	5.5449	0.00	60.6267
Cost						
Waiting Cost	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average	Minimum Value	Maximum Value
Predavanje dokumentacije.Queue	0.00	0,00	0.00	0.00	0.00	0.00
Other						
Number Waiting	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average	Minimum Value	Maximum Value
Predavanje dokumentacije.Queue	0.2784	0,04	0.2094	0.3610	0.00	7.0000

**Slika 31.** Rezultati simulacije za rep čekanja

**Izvor:** (Vlastita izrada autora)

Prema slici 31., mogu se prepoznati osnovne karakteristike reda čekanja u simuliranom modelu. Prosječno vrijeme čekanja u redu iznosi 4.09 minuta, maksimalno vrijeme čekanja iznosilo je 5.54 minute, a minimalno vrijeme čekanja je 3.21 minuta. Vrijeme čekanja u redu, fakultet nije koštalo ništa, odnosno suradnik je dovoljno vremena bio slobodan i time nije bilo potrebe za dodatnim zaposlenikom ili prekovremenim radom. Broj studenata koji čeka u redu je u prosjeku 0.278, što bi značilo da je u prosjeku jedan student bio na čekanju, ali sve kroz vrlo kratko vrijeme (u prosjeku 4.09 minuta).



## 9. ZAKLJUČAK

Upravljanje repovima čekanja, tema je ovog diplomskog rada i glavni cilj bio je opisati mogućnosti koordinacije, skraćivanja i analize istih. Karakteristika repova čekanja postoji zaista mnogo, kao i modela, te ih je zaista vrlo teško sve obuhvatiti. Repovi čekanja prisutni su svakodnevno u gotovo svim djelatnostima, gdje je svaka na svoj način pojedincima iznimno važna. Analiza i upravljanje repovima čekanja provedeno je kroz mnogo primjera i ilustracija. Čekanje je definicija svakog života čovjeka, ali i dijelova, odnosno proizvoda kojima je potrebna usluga. Većini poduzeća u cilju je smanjiti repove čekanja, odnosno skratiti vrijeme provedeno u repu, ali i u cjelokupnom sustavu. Prema provedenim istraživanjima može se utvrditi da mnogo poduzeća nastoje pružiti adekvatna rješenja za repove čekanja, ali ona moraju biti prethodno vrlo dobro analizirana i ispitana. Vrlo lako je globalnim poduzećima s velikim kapitalom i godišnjim prihodima, povećati broj poslužitelja. Naravno, takva poduzeća ne funkcioniraju na prethodno spomenuti način, već na potpuno suprotan. Korporacije tako velikih razmjera imaju određene osobe, menadžere i analitičare koji ulaze u problem do najsitnijih detalja i stvaraju optimalnu viziju i strategiju rješavanja takvih situacija. Mogući veći problemi javljaju se kod manjih poduzeća, koja jednostavno ne mogu financijski ispuniti ni jedan uvjet poboljšanja kvalitete i smanjenja repova čekanja. Značajan problem može predstavljati ograničenost prostorom, a ne samo manjkom poslužitelja ili financijskim sredstvima. Upravo tako, u radu je obrađen zanimljiv primjer jedne svjetske korporacije, odnosno zabavnog parka koji jednostavno ni ne funkcionira bez repova čekanja, ma koliko god mali nekad bili. Isto tako, vrlo su poznati po tome koliko uspijevaju zainteresirati klijente raznoraznim sporednim uslugama, gdje „ometaju“ klijente raznim zabavnim programima. Dijelovi repa čekanja sastoje se od nekolicine glavnih elemenata, koji su detaljno opisani i definirani u radu, a gotovo svaki element ima jedinstven utjecaj na rep. Poznato je da se najčešće korišteni modeli i njihove varijable opisujući repove čekanja ponašaju po Poissonovoj distribuciji, odnosno negativnoj eksponencijalnoj distribuciji. Poissonova distribucija definirana je i prikladnija uz pretpostavke dolazaka klijenata, dok negativna eksponencijalna distribucija uz odlaske, odnosno pružanje usluga. Naravno, ukoliko nije moguće zadovoljiti pretpostavke prethodno spomenutim distribucijama, nužno je razviti prikladniji model, potražiti bolji postojeći ili pribjeći računalnoj simulaciji.

Rezultatima simulacijskog modela prikazanim zasebnim poglavljem u radu, može se dodatno steći uvid u upravljanje repovima čekanja na jedan nekome lakši način, ali ponekad na jedini konkretni i adekvatni način. Vrlo je važno shvatiti da se simulacije modela izrađuju ponajviše

kada ne postoji mogućnost matematičkih proračuna ili je suviše teško i komplicirano samo po sebi obaviti sve te proračune. Primjer simulacijskog modela napravljenog pomoću programskog alata ARENA prikazuje model upisa na fakultet, odnosno predavanja dokumentacije potrebne za upis u referadu fakulteta. Rezultati same simulacije su vrlo jasni i precizni, a mogu biti iznimno dobra podloga za poslodavce i ljude koji se brinu o financijama poduzeća, u ovome slučaju fakulteta. Razlog zašto je prikazan samo jedan radnik, odnosno suradnik u referadi je vrlo jednostavan. Prvi bi se oslonio na iskoristivost samog suradnika, koji u procesu predavanja dokumentacije od studenta ne dostiže ni 50%. Odnosno, više od pola radnog vremena ima mogućnosti raditi dodatne druge poslove. Naravno, dodatni razlog je odrediti jednu osobu za određene procese, jer će onda ta osoba biti u potpunosti posvećena istome i moći učinkovito iskoristavati svoje radno vrijeme.

U konačnici, cilj ovog diplomskog rada bilo je istražiti i analizirati upravljanje repovima čekanja te objasniti i dokazati na koje načine je to ostvarivo. Analiza i kvaliteta upravljanja repovima čekanja proveda se kroz teorijski i praktični dio. Teorijski dio nastoji opširnije predstaviti sustave repove čekanja i metode kako ih adekvatno smanjiti, odnosno pružiti klijentima što kvalitetniju uslugu. Praktični dio se proveo djelomice kroz raznorazne primjere sustava repova čekanja i njihovim unaprjeđenjem te izradom konkretnog simulacijskog modela uz pomoć simulacijskog alata. Korist od ovog diplomskog rada može biti svim studentima, profesorima, ali i menadžerima i analitičarima koji tek spoznaju sustave repova čekanja, a do sada nisu stekli znanja i spoznaje o repovima čekanja, posebice u područjima analize i upravljanja.

## Literatura

1. Barković, D. (2001). Operacijska istraživanja, Drugo izmijenjeno i dopunjeno izdanje. Osijek: Ekonomski fakultet.
2. Barković, D. (2011). Uvod u operacijski menadžment, Drugo dopunjeno izdanje. Osijek: Ekonomski fakultet.
3. Stevenson, W.J. (2009). Operations Management, Tenth Edition. Boston: McGraw-Hill/Irwin.
4. Taha, H. A. (1992). Operations Research: An Introduction, Fifth Edition. New York: Macmillan Publishing Company.
5. Gaither, N. i Fraizer, G. (1999). Production and Operations Management, Eight Edition. Cincinnati: South-Western College Pub.
6. Gross, D., Shortle, J. F., Thompson, J.M. i Harris, C.M. (2008). Fundamentals of Queueing Theory, Fourth Edition. Hoboken : A John Wiley & Sons, Inc., Publication.
7. Fitzsimmons, J. A. i Fitzsimmons, M. J. (2011). Service Management: Operations, Strategy, Information Technology, Seventh Edition. New York: McGraw-Hill/Irwin.
8. Russell, R. S. i Taylor III, B.W. (2000). Operations Management: Multimedia Version, Third Edition. Upper Saddle River: Prentice Hall, Inc.
9. Hiller, F. S. i Lieberman, G. J. (1974). Operations Research, Second Edition. San Francisco: Holden-Day, Inc.
10. Davis, K. R. i McKeown, P.G. (1984). Quantitative Models for Management, Second Edition. Boston: Kent Publishing Company.
11. Schonberger, R. J. i Knod, E. M. Jr. (1988). Operations Management – Serving the Customer, Third Edition. Plano: Business Publications.
12. Čerić, V. i Varga, M. (2004). Informacijska tehnologija u poslovanju. Zagreb: Element
13. Čerić, V. (1993). Simulacijsko modeliranje. Zagreb: Školska knjiga.

## Internetski izvori

1. Šimunović, Lj. (2012). Teorija repova/redova. Dostupno na: [http://e-student.fpz.hr/Predmeti/O/Osnove\\_prometnog\\_inzenjerstva/Materijali/OPI\\_PREDAV\\_ANJE\\_2012.pdf](http://e-student.fpz.hr/Predmeti/O/Osnove_prometnog_inzenjerstva/Materijali/OPI_PREDAV_ANJE_2012.pdf) [pristupljeno: 20.kolovoza 2020.]
2. Brezavšček, A. (2014). Optimization of a Call Centre Performance Using the Stochastic Queueing Models. Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/126914> [pristupljeno 20.kolovoza 2020.]
3. Zenzerović, Z. (2005). Teorija redova čekanja. Dostupno na: <https://www.yumpu.com/xx/document/read/25270785/drsc-zdenka-zenzerovia-teorija-pomorski-fakultet-u-rijeci-> [pristupljeno: 28.kolovoza 2020.]
4. Lastavica, K. (2013). Teorija redova čekanja. Dostupno na: <http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/LAS06.pdf> [pristupljeno: 28.kolovoza 2020.]
5. Basch, D. (2003). Teorija redova. Dostupno na: [https://www.ieee.hr/download/repository/queueuing\\_theory\\_predavanja.pdf](https://www.ieee.hr/download/repository/queueuing_theory_predavanja.pdf) [pristupljeno: 29.kolovoza 2020.]
6. Arena Basic, User's Guide. Dostupno na: [http://www.efos.unios.hr/poslovne-simulacije/wp-content/uploads/sites/180/2013/09/Arena\\_Basic\\_Edition\\_User\\_s\\_Guide11.pdf](http://www.efos.unios.hr/poslovne-simulacije/wp-content/uploads/sites/180/2013/09/Arena_Basic_Edition_User_s_Guide11.pdf) [pristupljeno: 5.rujna 2020.]
7. Zekić-Sušac, M. (2013). Simulacijski programi i primjena diskretne simulacije. Dostupno na: <http://www.efos.unios.hr/poslovne-simulacije/wp-content/uploads/sites/180/2013/04/Predavanje-5-Simulacijski-programi-i-primjena-diskretne-simulacije.pdf> [pristupljeno: 5.rujna 2020.]
8. Zekić-Sušac, M. (2013). Poslovne simulacije. Dostupno na: [http://www.efos.unios.hr/ikelic/wp-content/uploads/sites/4/2013/04/P1\\_Uvod.pdf](http://www.efos.unios.hr/ikelic/wp-content/uploads/sites/4/2013/04/P1_Uvod.pdf) [pristupljeno: 5.rujna 2020.]

## Popis slika

Slika 1. Sustav repa čekanja na primjeru autopraonice.....	6
Slika 2. Sustav repa čekanja na primjeru „call-centra“ .....	6
Slika 3. Osnovni elementi sustava repova čekanja .....	8
Slika 4. Podjela izvora clijenata .....	9
Slika 5. Podjela dolazaka clijenata.....	11
Slika 6. Prikaz tri učestala ponašanja clijenata u repovima .....	13
Slika 7. Konfiguracije alternativa prostora za čekanje.....	14
Slika 8. Prikaz Poissonove i negativne eksponencijalne distribucije.....	19
Slika 9. Poissonova distribucija dolazaka i eksponencijalna distribucija vremena usluga .....	20
Slika 10. Model – jedan kanal, jedna faza usluge .....	23
Slika 11. Model – jedan kanal, više faza usluga .....	24
Slika 12. Model – jedan kanal, više mjesta usluga, jedna faza usluge.....	25
Slika 13. Model – više kanala, jedna faza usluge, više mjesta usluga .....	26
Slika 14. Model – više kanala, više faza usluga, više mjesta usluga .....	26
Slika 15. Model – više kanala, jedna ili više faza usluga, jedno mjesto usluge.....	27
Slika 16. Prikaz varijabli na primjeru.....	29
Slika 17. Iskoristivost sustava .....	33
Slika 18. Krivulje troškova.....	34
Slika 19. Krivulja ovisnosti ukupnog troška o broju poslužitelja .....	37
Slika 20. Primjer standardizacije modela repa čekanja .....	40
Slika 21. Dijagram promjene (dolazaka i odlazaka) clijenata.....	41
Slika 22. Primjer modela izrađen u ARENA Simulation.....	50
Slika 23. Prikaz „Create“ modula s definiranim parametrima .....	51
Slika 24. Prikaz „Process“ modula s definiranim parametrima .....	52
Slika 25. Definiranje parametara resursa „Suradnika“.....	52
Slika 26. Definiranje discipline repa, odnosno pružanja usluge .....	53
Slika 27. Prikaz „Decide“ modula s definiranim parametrima .....	53
Slika 28. Prikaz „Dispose“ modula .....	53
Slika 29. Definiranje parametara simulacije .....	54
Slika 30. Rezultati simulacije i dijagram troškova.....	54
Slika 31. Rezultati simulacije za rep čekanja .....	55

## **Popis tablica**

Tablica 1. Primjer sustava čekanja .....	3
Tablica 2. Značajke i primjeri beskonačnog izvora .....	9
Tablica 3. Definicije varijabli repa čekanja.....	29
Tablica 4. Implikacije menadžera .....	32
Tablica 5. Metode za zadovoljstvo klijenata - primjer Walt Disney .....	39
Tablica 6. Specifični Poissonovi modeli repa čekanja – 1.dio.....	45
Tablica 7. Specifični Poissonovi modeli repa čekanja – 2.dio.....	46
Tablica 8. Nepoissonovi modeli repa čekanja.....	47
Tablica 9. Prednosti i nedostaci simulacijskih modela .....	49
Tablica 10. Rezultati simulacije .....	55